<u>ESERCIZI 2</u>

L. Stoppino, corso di Geometria 1
Università di Pavia, a.a. 2019/20
Soluzioni svolte da Enea Riva

1 Sia $\mathbb{P}$ uno spazio proiettivo di dimensione 3. Dimostrare che tre piani distinti Π_1, Π_2, Π_3 si incontrano sempre in almeno un punto. Generalizzare a n iperpiani distinti in uno spazio proiettivo di dimensione n.

soluzione Siano (x_0, x_1, x_2, x_3) coordinate omogenee di $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}$. Ad ogni piano $\Pi \subset \mathbb{P}$ allora corrisponde un sottospazio di dimensione 3 in $\mathbb{K}^4$. Sia

$$\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$$

(con $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq (0,0,0,0)$) una equazione di tale sottospazio (che è un'equazione per Π).
Considero 2 piani Π Π'. Il luogo di intersezione $\Pi \cap \Pi'$ avrà coordinate omogenee che soddisfano il sistema:

$$\begin{cases} \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0 \\ \alpha'_0 x_0 + \alpha'_1 x_1 + \alpha'_2 x_2 + \alpha'_3 x_3 = 0 \end{cases}$$

che in forma matriciale diventa:

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha'_0 & \alpha'_1 & \alpha'_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Consideriamo ora 3 piani distinti Π_1,Π_2 Π_3, il luogo $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3$ avrà coordinate omogenee date da:

$$\begin{bmatrix} \alpha_0^{(1)} & \alpha_2^{(1)} & \alpha_3^{(1)} \\ \alpha_0^{(2)} & \alpha_2^{(2)} & \alpha_3^{(2)} \\ \alpha_0^{(3)} & \alpha_2^{(3)} & \alpha_3^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ora, essendo i tre piani distinti, si ha che:

$$\alpha_i^{(1)} \neq k\alpha_i^{(2)} \quad \alpha_i^{(1)} \neq k\alpha_i^{(3)} \quad i = 0, 1, .., 3 \quad \text{e } \forall k \neq 0$$

ovvero la matrice A ha $\text{rk}(A) \geq 2$ e

$$2 \leq \text{rk}(A) \leq 3. \qquad (1)$$

Quindi dal teorema di nullità più rango si ha:

$$\dim(\ker(A)) = 4 - rk(A),$$

e dalla (1) segue che $1 \leq \dim(\ker(A)) \leq 2$; quindi esiste almeno un vettore non nullo che soddisfa l'equazione e quindi almeno un punto $p \in \mathbb{P}$ nell'intersezione dei 3 piani.

In Generale dati $\Pi_1, ..., \Pi_n$ iperpiani di $\mathbb{P}^n$ si ha il sistema $Ax = 0$:

$$\begin{bmatrix} \alpha_0^{(1)} & \alpha_2^{(1)} & \dots & \alpha_n^{(1)} \\ \alpha_0^{(2)} & \alpha_2^{(2)} & \dots & \alpha_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_0^{(n)} & \alpha_2^{(3)} & \dots & \alpha_n^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Con A matrice del tipo $n \times (n+1)$. Quindi come prima

$$1 \leq \dim(\ker(A)) \leq (n+1) - 2 = n - 1$$

Quindi esiste almeno una soluzione non nulla del sistema, quindi un punto nello spazio proiettivo appartenente a $\Pi_1 \cap .... \cap \Pi_n$.

3 Si mostri che i punti del piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$

$$[1, 1, 1],\ [3, 1, 0],\ [1, -\frac{1}{3}, -1]$$

sono allineati, e si determini un'equazione della retta che li contiene.

soluzione In generale $p_1, ..., p_k \in \mathbb{P}^n$ si dicono allineati se il sottospazio generato dalle corrispondenti coordinate omogenee ha dimensione 2, ovvero dette $(p_0^{(i)}, ..., p_n^{(i)})$ le coordinate omogenee di p_i se

$$\dim(\mathrm{Span}((p_0^{(1)}, ..., p_n^{(1)}), ..., (p_0^{(n)}, ..., p_n^{(n)}))) = 2$$

Nel caso specifico, calcoliamo il rango della matrice A ottenuta considerando come vettori riga le coordinate dei punti, ovvero:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1/3 & -1 \end{bmatrix}$$

tramite operazioni su righe si ha:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1/3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & -4/3 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ovvero $\mathrm{rk}(A) = 2$ e quindi i punti sono allineati.
Ricordiamo come l'equazione cartesiana di un iperpiano (Π) sia della forma:

$$\alpha_0 x_0 + \alpha_0 x_0 + \alpha_0 x_0 = 0,$$

la quale è soddisfatta per tutti i punti $(x_0, x_1, x_2) \in \Pi$ e quindi a fortiori anche per i tre punti $[1, 1, 1]$,$[3, 1, 0]$,$[1, -1/3, -1]$ che spannano il piano. Quindi possiamo affermare che la terna $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ soddisfa il sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1/3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ovvero $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \in \ker(A)$. Si osserva facilmente come $\ker(A) = \langle [1/2, -3/2, 1] \rangle$. Quindi una possibile equazione è data da

$$x_0 - 3x_1 + 2x_2 = 0.$$

5 Si considerino in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ i punti

$$P_1 = [1, 0, 1, 2],\ P_2 = [0, 1, 1, 1],\ P_3 = [1, \frac{1}{2}, 1, 1],\ P_4 = [1, 1, 1, 0].$$

(a) Si dica se P_1, P_2, P_3, P_4 sono in posizione generale.

(b) Si calcoli la dimensione del sottospazio generato da $L(P_1, P_2, P_3, P_4)$ e se ne determinino equazioni cartesiane.

(c) Si completi, se possibile, l'insieme $\{P_1, P_2, P_3\}$ ad un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$.

soluzione (a) Basta verificare che la matrice A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

abbia $\mathrm{rk}(A) = \min(n, m)$ (n numero di righe e m numero di colonne), ovvero che abbia rango massimo , che in questo caso si traduce in $\mathrm{rk}(A) = 4$.
Un rapido calcolo mostra che $\det(A) = 0$, quindi i punti non sono in posizione generale.

(b) Tramite operazioni su righe abbiamo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi $\mathrm{rk}(A) = 3$. Il sottospazio $L(p_1, p_2, p_3, p_4)$ ha dunque dimensione proiettiva 2 (piano proiettivo).
Come in precedenza un'equazione sarà data da $\ker(A) = \langle [1, 2, -3, 1] \rangle$ cioè

$$x_0 + 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$$

(c) Osserviamo preliminarmente come i punti P_1, P_2, P_3 siano in posizione generale, (basta osservare come le prime 3 righe di A siano linearmente indipendenti). Per completarli a un sistema di riferimento proiettivo basta quindi determinare un vettore (punto) Q che sia indipendente da $\{P_1, P_2, P_3\}$. A tal uopo ricordiamo come un vettore v ortogonale a $w_1, ..., w_k$ è linearmente indipendente da $w_1, ..., w_k$.
Quindi cerchiamo un Q le cui coordinate $(q_0, .., q_3)$ soddisfano il sistema $Bq = 0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

si vede a occhio come una soluzione di tale sistema, appartenga a $\ker(A)$, difatti la riduzione a scala di B coincide con le righe non nulle della riduzione a scala di A, quindi i due sistemi omogenei $Ax = 0$ e $Bq = 0$ hanno le stesse soluzioni. Quindi un possibile punto è dato da $Q = [1, 2, -3, 1]$.

17 (Senersi Geo 1, Es.31.1) Per ciascuna delle seguenti coniche di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, determinare rango ed equazione canonica.

(a) $x_0^2 - x_1^2 + x_1x_2 = 0$;

(b) $x_0x_1 + x_1x_2 + x_0x_2 = 0$;

(c) $x_0^2 + x_1^+ x_2^2 - 2x_0x_1 - 2x_1x_2 = 0$.

soluzione (a) $x_0^2 - x_1^2 + x_1x_2 = 0$ in forma matriciale posso scrivere

$$(x_0, x_1, x_2)^t A(x_0, x_1, x_2) = 0,$$

con A pari a:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Per definizione il rango della conica sarà pari al rango della matrice associata A, mentre la forma canonica è specificata completamente sapendone la segnatura. Quindi determiniamo il polinomio caratteristico:

$$\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)((\lambda + 1)\lambda - 1/4) = 0$$

da cui

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = -1/2 + \sqrt{5}/4 > 0 \qquad \lambda_3 = -1/2 - \sqrt{5}/4 < 0$$

Quindi il rango è pari a 3, mentre la forma canonica è data da:

$$X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 = 0.$$

(b) $x_0x_1 + x_1x_2 + x_0x_2 = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} = 1/2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcolando il polinomio caratteristico:

$$\det(A - \lambda/2I) = 1/8(-\lambda(\lambda^2 - 1) + (\lambda + 1) + (1 + \lambda)) = 1/8(-\lambda^3 + 3\lambda + 2) = 0,$$

e gli autovalori sono:

$$\lambda_1/2 = -1 \qquad \lambda_2/2 = -1 \qquad \lambda_3/2 = 2$$

quindi il rango è 3, mentre la forma canonica è data da:

$$-X_0^2 - X_1^2 + X_2^2 = 0$$

(c) $x_0^2 + x_2^2 - 2x_0x_1 - 2x_1x_2 = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcolando il polinomio caratteristico:

$$\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)(\lambda - 1)\lambda + (-(1 - \lambda)) = -(\lambda + 1)(\lambda - 1)^2 = 0$$

e gli autovalori sono:

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 1 \qquad \lambda_3 = -1$$

Quindi il rango è 3, mentre la forma canonica è data da:

$$X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 = 0$$