Soluzione esame del 10 settembre 2019

1) <u>vero o falso</u> (prima leggetele bene tutte)

(a) <u>VERO</u>: se $f: X \to Y$ è applicazione continua ed $E \subseteq X$ è denso, allora $f(E)$ è denso in $f(X)$:

Ricordiamo che E denso in X significa che $\forall\, \mathcal{U} \in \tau_X$ con $\mathcal{U} \neq \emptyset$, vale che $\mathcal{U} \cap E \neq \emptyset$

Sia ora $\mathcal{W}$ aperto in Y tale che $\mathcal{W} \cap f(X) \neq \emptyset$ (in altre parole $\mathcal{W} \cap f(X)$ è aperto non vuoto in $f(X)$);

se prendo $f(f^{-1}(\mathcal{W}) \cap E)$ ho che

$f(f^{-1}(\mathcal{W}) \cap E) = \mathcal{W} \cap f(E)$ (ref: ad esempio Manetti pag 20 formula di proiezione)

Inoltre siccome f è continua e $\mathcal{W}$ aperto in Y

$f^{-1}(\mathcal{W})$ è aperto in X e non vuoto.

Dunque poiché E è denso in $X \Rightarrow f^{-1}(\mathcal{W}) \cap E \neq \emptyset$.

(b) <u>FALSO</u>: prendiamo $f = \mathrm{cost}_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cioè $f(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ con la topologia euclidea in partenza e in arrivo.

$\mathbb{R}$ stesso è denso in $\mathbb{R}$ ma $f(\mathbb{R}) = \{0\}$ non è denso in $\mathbb{R}$ poiché $\overline{\{0\}} = \{0\} \subsetneq \mathbb{R}$.

(c) Se $D \subseteq Y$ è denso in Y allora $f^{-1}(D)$ è denso in X? <u>Falso</u>.

Prendo lo stesso controesempio di (b):

$f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \emptyset \subseteq \mathbb{R}$ che ovviamente non è denso in $\mathbb{R}$, ma d'altra parte $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ è denso in $\mathbb{R}$.

(d) se $D \subseteq Y$ è denso e f è aperta, $f^{-1}(D)$ è denso in X <u>VERO</u>

sia $D \subseteq Y$ denso in Y. Sia $\mathcal{U} \subseteq X$ aperto non vuoto.

$f(\mathcal{U} \cap f^{-1}(D)) = f(\mathcal{U}) \cap D$ per la formula di proiezione

ed essendo f aperta $f(\mathcal{U})$ è aperto non vuoto in Y. Dunque $f(\mathcal{U}) \cap D \neq \emptyset$.

e di conseguenza necessariamente $\mathcal{U} \cap f^{-1}(D) \neq \emptyset$.

[osservazione su un errore frequente]

Attenzione: è vero che $\forall f: X \to Y$ applicazione

$\forall A \subseteq X \quad \forall B \subseteq Y$

$$\boxed{f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B}$$

(formula di proiezione)

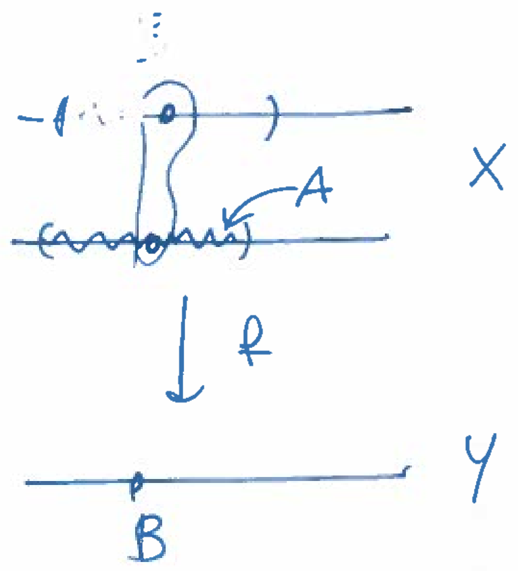
Ma non è detto che

$$\boxed{f^{-1}(B \cap f(A)) = f^{-1}(B) \cap A}$$

Infatti l'unica cosa che sappiamo è che vale questa inclusione $\boxed{\supseteq}$

Controesempio: prendo

$X = \{y=0\} \cup \{y=1\} \subseteq \mathbb{R}^2$



$Y = \mathbb{R}$

$f(x,y) = p_1(x,y) = x$

prendo $A = (0,1) \times \{0\}$

$B = \{1/2\}$.

allora

$B \cap f(A) = \{1/2\}$ $\qquad$ $f^{-1}(B) \cap A = \{(1/2, 0)\}$

$f^{-1}(B \cap f(A)) = \{(1/2,0), (1/2,1)\}$ $\neq$

ES 2

(a) $\forall\, S \subseteq \mathbb{R}^n$ $i(S)$ inviluppo convesso di S è definito come

$$i(S) := \bigcap_{\substack{C \text{ convesso in } \mathbb{R}^n \\ C \supseteq S}} C$$

Dobbiamo vedere che $i(S)$ è convesso. Basta osservare che se $\underline{x}, \underline{y} \in i(S)$, allora $\forall t \in [0,1]$ $t\underline{x} + (1-t)\underline{y} \in i(S)$

infatti se $\underline{x}, \underline{y} \in i(S)$ allora $\underline{x}, \underline{y} \in C$ $\forall\, C$ convesso con $C \supseteq S$

allora $\forall t \in [0,1]$ $t\underline{x} + (1-t)\underline{y} \in C$ " , e

dunque $t\underline{x} + (1-t)\underline{y} \in i(S)$.

(b) $\Delta_n = i\Big(\big\{\underbrace{\{\underline{0}\}}_{Q_0}, \underbrace{\{e_i\}}_{Q_i}, i=1,\dots,n\big\}\Big) \subseteq \mathbb{R}^n$

voglio verificare che

$$(*) \quad \Delta_n = \left\{ (\underline{x}) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^n x_i \le 1,\ x_i \ge 0\ \forall i=1,\dots,n \right\}$$

osservo che se $n=1$

Δ_1 = inviluppo convesso di $\{0,1\}$ (dunque $\leftarrow$ segmento tra 0 e 1)

$\Delta = [0,1] = \{ x \in \mathbb{R}^n \text{ tc } x \le 1 \text{ e } x \ge 0 \}$

Quindi nel caso $n=1$ l'affermazione è vera.

Chiamo Σ_n l'insieme a destra nella $(*)$

Verifico che Σ_n è convesso: siano $\underline{x}, \underline{y} \in \Sigma_n$

sia $t \in [0,1]$ allora, dato $\underline{z} := t\underline{x} + (1-t)\underline{y}$

ho: $\displaystyle\sum_{i=1}^n z_i = \sum_{i=1}^n \big(t(x_i) + (1-t)y_i\big) = t\sum_{i=1}^n x_i + (1-t)\sum_{i=1}^n y_i =$

$$= \underset{\geq 0}{t} \underset{\leq 1}{\sum_{i=1}^{m} x_i} + \underset{\geq 0}{(1-t)} \underset{\leq 1}{\sum_{i=1}^{m} y_i} \leq t \cdot 1 + (1-t)\cdot 1 = 1$$

D'altra parte $\forall i$ $\quad z_i = \underset{\geq 0}{t}\,\underset{\geq 0}{x_i} + \underset{\geq 0}{(1-t)}\,\underset{\geq 0}{y_i}$ è ≥ 0

Dunque $t\underline{x} + (1-t)\underline{y} \in \Sigma_n$

Inoltre è immediato vedere che $\{Q_0, \dots Q_n\} \subseteq \Sigma_n$,

dunque per definizione di inviluppo convesso $\boxed{\Sigma_n \supseteq \Delta_n}$

Vediamo l'altra inclusione.

Sia $\underline{x} \in \Sigma_n$ osservo che se $\sum x_i < 1$

allora posso vedere $\underline{x}$ come

$$\underline{x} = \left(1 - \sum x_i\right) \cdot e_0 + \sum x_i \underbrace{\left(\frac{x_1 e_1}{\sum x_i} + \dots + \frac{x_n e_n}{\sum x_i} \right)}_{= \underline{x}'}$$

e $\underline{x}'$ è tale che

$$\underline{x}' = (x'_1, \dots x'_n) = \left(\frac{x_1}{\sum x_i}, \dots \frac{x_n}{\sum x_i} \right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x'_i = \frac{\sum x_i}{\sum x_i} = 1$$

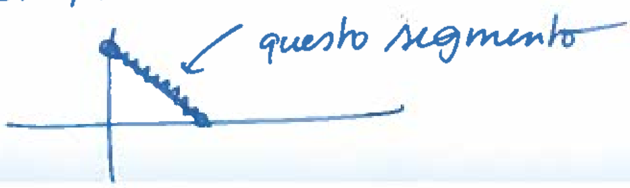
In altre parole posso vedere ogni $\underline{x} \in \Sigma_n$ come un punto del segmento di estremi Q_0 e $\underline{x}'$.

Mi basta dunque vedere che $\underline{x}' \in \Delta_n$ per concludere che necessariamente $\underline{x} \in \Delta_n$.

Ci siamo dunque ridotti a dimostrare che

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \sum x_i = 1 \text{ e } x_i \geq 0 \} \subseteq \Delta_n \qquad (A)$$

Disegno per $n = 1$ $\qquad$ per $n = 2$



ora dimostro (A)

sia $\underline{x} \in \mathbb{R}^m$ tale che $\Sigma x_i = 1$ e $x_i \geq 0$.

sia $k(\underline{x}) = \#\{ i \in \{1..m\} \mid x_i \neq 0 \}$

siccome $\Sigma x_i \geq 1$ e $x_i \geq 0$ ho $k \geq 1$

se $k = 1$ necessariamente $\underline{x} = e_\alpha \in \Delta_n$ per

qual che $\alpha \in \{1, .., m\}$

dunque se $k = 1$ $\quad \underline{x} \in \Delta_n$

ora dimostro per induzione che se è vero che

$$\left(\forall \underline{x} \in \Sigma_n \text{ tale che } k(\underline{x}) = k-1 \Rightarrow \underline{x} \in \Delta_n \right)$$

allora è vero che

$$\left(\forall \underline{x} \in \Sigma_n \text{ tali che } k(\underline{x}) = k \Rightarrow \underline{x} \in \Delta_n \right)$$

Sia $\underline{x} \in \Sigma_n$ tale che $k(\underline{x}) = k \geq 2$

allora fissato $\alpha \in \{1, .. n\}$ tale che $x_\alpha \neq 0$ $(x_\alpha \in (0,1))$

ho che
$$\underline{x} = x_\alpha e_\alpha + \boxed{\sum_{i \neq \alpha} x_i e_i}$$

e vale che
$$\underline{x} = x_\alpha e_\alpha + (1-x_\alpha)\left(\sum \frac{x_i}{1-x_\alpha} e_i \right)$$

$$= x_\alpha e_\alpha + (1-x_\alpha)\underbrace{\left(\sum \frac{x_i}{1-x_\alpha} e_i \right)}_{=:\underline{x}'} \rightarrow (B)$$

ho che $\underline{x}'$ è tale che

$$\Sigma x'_i = \frac{\sum_{i \neq \alpha} x_i}{1-x_\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i - x_\alpha}{1-x_\alpha} = \frac{1-x_\alpha}{1-x_\alpha} = 1$$

e $x'_i := \frac{x_i}{1-x_\alpha} \geq 0$ dunque $\underline{x}' \in \Sigma_n$ e $k(\underline{x}') = k-1$

per ipotesi induttiva $\underline{x}' \in \Delta_n$.

Ora per (B) $\quad \underline{x} = x_\alpha \underbrace{e_\alpha}_{\in \Delta_n} + (1-x_\alpha) \underbrace{\underline{x}'}_{\in \Delta_n}$ dunque $\underline{x} \in \Delta_n$ come volevamo

(c) Δ_n è chiuso. Infatti, in $\mathbb{R}^n$ gli insiemi della forma

$\{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tc } f(\underline{x}) = 0\}$, $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\underline{x}) \geq 0\}$ (≤ 0) con $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua

sono dei chiusi: sono rispettivamente

$f^{-1}(\{0\})$ e $f^{-1}([0,+\infty))$ / $f^{-1}((-\infty,0])$ e $\{0\}$, $[0,+\infty)$, $(-\infty,0]$

sono chiusi in $\mathbb{R}$.

$$\Delta_n = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\underline{x}) \leq 0 \text{ e } g_i(\underline{x}) \geq 0\}, \text{ dove}$$

$$f(\underline{x}) = \sum x_i - 1 \quad \text{e} \quad g_i(\underline{x}) = x_i \quad \forall i = 1, .., n$$

cioè $\Delta_n = \{f(\underline{x}) \leq 0\} \cap \bigcap_{i=1}^{n} \{g_i(\underline{x}) \geq 0\}$

Dunque Δ_n è intersezione finita di chiusi in $\mathbb{R}^n$: è chiuso.

Dunque $\Delta_n = \overline{\Delta_n}$ (Sottoinsieme di uno spazio topologico è chiuso se e solo se coincide con la sua chiusura)

$$\mathring{\Delta}_n = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\underline{x}) < 0 \text{ e } g_i(\underline{x}) > 0\}$$

Infatti, detto A l'insieme di destra, A è aperto

perchè $A = f^{-1}((0,+\infty)) \cap \bigcap_{i=1}^{n} g_i^{-1}((0,+\infty))$

e $(0,+\infty)$ è un aperto di $\mathbb{R}$. Ovviamente $A \subseteq \Delta_n$

Dunque $A \subseteq \mathring{\Delta}_n = \bigcap_{\substack{\mathcal{U} \text{ aperto} \\ \mathcal{U} \subseteq \Delta_n}} \mathcal{U}$

D'altra parte

Sia $\underline{x} \in \Delta_n \setminus A$. Allora vale che $f(\underline{x}) = 0 \vee g_i(\underline{x}) = 0$ per qualche i

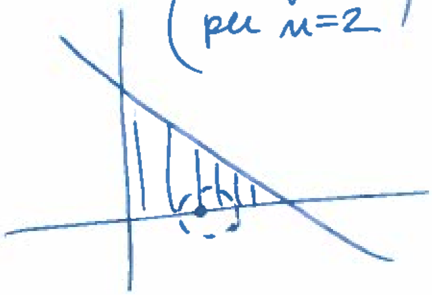
se prendo una bolla di qualunque raggio $\varepsilon > 0$ centrata in $\underline{x}$ $B_\varepsilon(\underline{x})$, esiste uno $\underline{z} \in B_\varepsilon(\underline{x})$ che non appartiene a Δ_n

7

Infatti, se prendo $\underline{x}$ tale che $\exists\, x_i$ tale che $x_i = 0$

allora

(Disegno per $n=2$)



$\underline{x}' := \underline{x} - \delta e_i$ con e_i vettore i-esimo della base canonica

$\forall \delta \in (0, \varepsilon)$

ho che $\underline{x}' \in B_\varepsilon(\underline{x})$

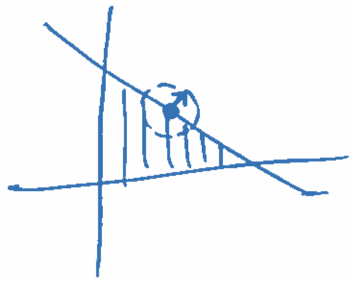
(perché $d_e(\underline{x}, \underline{x}') = \| \underline{x} - \underline{x}' \| = \| \delta e_i \| = |\delta| = \delta < \varepsilon$)

ma $\underline{x}' \notin \Delta_n$ (comunemente, perché ha i-esima coordinata negativa)

Se invece abbiamo $x_i \neq 0$ (cioè $x_i > 0$) $\forall i$ e $\sum x_i = 1$

basta prendere per $\delta > 0$

$\underline{x}' = \underline{x} + \delta \underline{m}$ dove $\underline{m} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$



ho che

$d(\underline{x}', \underline{x}) = \| \delta \underline{m} \| = \delta \| \underline{m} \| = \delta \sqrt{n}$

mentre

$$\sum_{i=1}^{n} x_i' = \sum (x_i + \delta_i) = 1 + \delta > 1$$

Basta prendere $\delta > 0$ tale che $\delta < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ e ho che

$\underline{x}' \in B_\varepsilon(\underline{x})$ ma $\underline{x}' \notin \Delta_n$

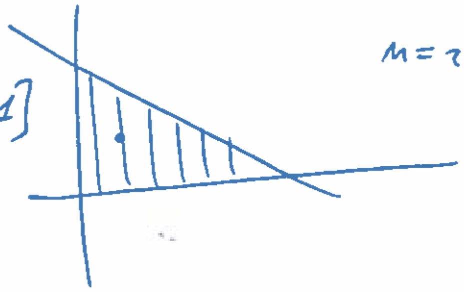
Dunque $\mathring{\Delta}_n = A$ (Abbiamo appena visto che $\forall\, \underline{x} \in \Delta_n \setminus A$, $\underline{x}$ non è interno a Δ_n)

$$Fr(\Delta_n) = \Delta_n \setminus \mathring{\Delta}_n = \Delta_n \setminus \Delta_n = \{ \underline{x} \in \Delta_n \mid \sum x_i = 1 \vee \exists i \text{ t.c. } x_i = 0 \}$$

(d) $\Delta_1 = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$

→ Δ_n per $n \geq 2$ non è omeomorfo a Δ_1

Infatti, osservo che $\forall\, n \geq 2$ se tolgo un punto da Δ_n ottengo uno spazio connesso per archi dunque connesso;



mentre $\Delta_1 \setminus \{1/2\} = [0,\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2},1]$ che è sconnesso.

Se esistesse φ omeomorfismo

$$\varphi : \Delta_1 \longrightarrow \Delta_n$$

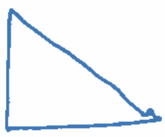
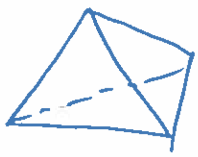
avrei che in particolare

$$\varphi_{|\Delta_1 \setminus \{1/2\}} : \Delta_1 \setminus \{1/2\} \longrightarrow \Delta_n \setminus \{\varphi(\tfrac{1}{2})\}$$

sarebbe un omeomorfismo tra uno spazio sconnesso e uno connesso. Assurdo.

→ Osserviamo che lo stesso ragionamento si può applicare a $Fr(\Delta_n)$ $\forall\, n \geq 2$

Infatti

$Fr(\Delta_2)$:  $Fr(\Delta_3)$  tetraedro

dunque $Fr(\Delta_n) \not\cong \Delta_1$ per nessun $n \geq 2$

inoltre $Fr(\Delta_1) = \{0,1\}$ che è sconnesso, mentre Δ_1 è connesso, dunque $Fr(\Delta_1) \not\cong \Delta_1$.

3 (a) Essendo 4 punti in $\mathbb{P}^3$, essi sono in posizione generale se e solo se, dati $v_i \in \mathbb{R}^4$ tali che $[v_i] = P_i$, vale che i v_i sono indipendenti in $\mathbb{R}$

siano dunque:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ho che $\quad v_1 = v_3 - v_4 \quad$ dunque no, i punti non sono in posizione generale.

(b) $L(P_1 \ldots P_4) = \mathbb{P}(\mathrm{span}(v_1, \ldots, v_4))$, per definizione.
Dunque la dimensione del sottospazio generato dai P_i è $\dim(\mathrm{span}(P_1, \ldots, P_4)) - 1 = 2$

Infatti $v_1 \in \mathrm{span}(v_3, v_4)$

ma v_2, v_3, v_4 sono linearmente indipendenti

(ad esempio la sottomatrice $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ della matrice che ha v_2, v_3, v_4 come colonne ha determinante diverso da zero)

dunque $L(P_1, \ldots, P_4)$ è determinato da una equazione cartesiana.

Posso trovare questa equazione usando la formula:

$$\det\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 0$$

dunque ottengo $\boxed{x_0 + 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0}$ (A)

(c) Per determinare in modo univoco un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}^3$ devo considerare 5 punti in posizione generale.

P_1, P_2, P_3 sono in posizione generale

se considero $P_4' := [1, 0, 0, 0] = [v_4']$

è chiaro che $v_4' \notin \operatorname{span}(v_1, v_2, v_3)$, che ha equazione (A) dunque P_1, P_2, P_3, P_4' sono in posizione generale.

Ora devo scegliere un punto unità, ad esempio

$M = [v_1 + v_2 + v_3 + v_4']$ (l'importante è che un vettore associato ad M sia una combinazione lineare a coefficienti non tutti nulli dei v_1, v_2, v_3, v_4')

$M = [4, 3, 5, 5]$

I punti P_1, P_2, P_3, P_4 e M identificano in modo univoco un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}^3$.