Geometria I

CdL in Matematica

Università di Pavia

Prova scritta telematica del 17 febbraio 2021

Giustificare sempre le risposte.

1. *(15 punti)* Sia $\mathcal{C}$ la conica di equazione

$$\mathcal{C} : 3x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x - 10y + 7 = 0$$

nel piano euclideo $\mathbb{E}^2$.

   (a) La si classifichi dal punto di vista euclideo e affine. Determinare l'equazione canonica euclidea di $\mathcal{C}$ in $\mathbb{E}^2$.

   (b) Determinare il cambiamento di coordinate euclidee necessario affinché assuma tale equazione.

   (c) Si scriva l'equazione della chiusura proiettiva $\overline{\mathcal{C}}$ di $\mathcal{C}$ in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ e se ne calcolino i punti impropri.

   (d) Si scriva l'equazione canonica proiettiva di $\overline{\mathcal{C}}$ e si esibisca una proiettività che la porta in forma canonica.

2. *(15 punti)* Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^2$ con la topologia euclidea:

$$\begin{aligned}
A &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\},\\
B &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2 - 1)x = 0\},\\
C &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2 - 1)xy = 0\},\\
D &:= A \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\},\\
E &:= \{0, 1\} \times \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Discutere per ciascuno di essi se valgono o meno le seguenti proprietà topologiche:

   (a) Essere separabile.

   (b) Essere compatto.

   (c) Essere connesso. In caso di non connessione esibire le componenti connesse.

Suddividerli in classi di omeomeorfismo.

Soluzioni

(a) $\mathcal{C}: 3x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x - 10y + 7 = 0$

La matrice associata è

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & -5 & 7 \end{pmatrix}$$

A' sottomatrice della parte quadratica

$\det(A') = 9 - 1 = 8 > 0$

allora $\mathcal{C}$ è una ellisse

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -5 \\ 0 & -8 & 12 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -8 & 16 \\ 1 & 3 & -5 \\ 0 & -8 & 12 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -8 & 16 \\ -8 & 12 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 1 & 16 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} =$$

$$= 32 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 24\,(3-4) = -24 \neq 0$$

è ellissi non degenere

Vediamo se è a punti reali

$x = 0 \quad 3y^2 - 10y + 7 \quad \Delta = 100 - 84 > 0$ ok

$\mathcal{C}$ è ellissi non degenere a punti reali

ora determino il cambiamento di coordinate euclidee per portarla forma canonica:

$\to$ Diagonalizzo $A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ autovalori: radici di

$$\begin{vmatrix} 3-t & 1 \\ 1 & 3-t \end{vmatrix} = (3-t)^2 - 1 = t^2 - 6t + 9 - 1 = t^2 - 6t + 8 =$$

$$= (t-2)(t-4)$$

Autovalori: $2, 4$

Autospazi:

$$V_2 = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \{ x+y=0 \} = \mathrm{span} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$V_4 = \mathrm{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Con il cambiamento di coordinate

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}_{\text{la trasposta}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

otteniamo equazione

$$\mathcal{C} : 2(x')^2 + 4(y')^2 + 2\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right) - 10\left(\frac{-x'+y'}{\sqrt{2}}\right) + 7 = 0$$

quindi

$$2(x')^2 + 4(y')^2 + \frac{12}{\sqrt{2}} x' - \frac{8}{\sqrt{2}} y' + 7 = 0$$

ora completo i quadrati

$$2(x')^2 + \frac{12}{\sqrt{2}} x' = \left(\sqrt{2}\, x' + 3\right)^2 - 9$$

$$\frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$$

$$4y'^2 - \frac{8}{\sqrt{2}} y' = 4(y')^2 - 4\sqrt{2}\, y' = \left(2y' - \sqrt{2}\right)^2 - 2$$

allora ponendo $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' + \frac{3}{\sqrt{2}} \\ y' - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ ottengo

nuova equazione di $\mathcal{C}$

$$2(x'')^2 + 4(y'')^2 - 9 - 2 + 7 = 0$$

ovvero $\boxed{2(x'')^2 + 4(y'')^2 - 4 = 0}$ ovvero $\mathcal{C} : \frac{(x'')^2}{2} + (y'')^2 = 1$

equazione canonica euclidea

Il cambiamento di coordinate euclidee è :

$$\boxed{\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}$$

cambiamento di coordinate che porta in forma canonica

(c) $\overline{\mathcal{C}} = 3x_1^2 + 2 x_1^2 x_2^2 + 3x_2^2 + 2x_0x_1 - 10x_0x_2 + 7x_0^2 = 0$

per quanto visto prima è conica non degenere a punti reali

equazione canonica : $x_0'^2 + x_1'^2 - x_2'^2 = 0$

$\overline{\mathcal{C}} \cap \{x_0 = 0\} = \emptyset$

$\overline{\mathcal{C}}$ non ha punti impropri rispetto a x_0

(d) per trovare una proiettività che porta $\overline{\mathcal{C}}$ in forma canonica basta prendere ad esempio la proiettivizzazione del cambiamento di coordinate euclidee in questo modo:

se considero

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{C}$ è rappresentata da

$(x, y, 1)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ e nelle coordinate $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$ da

$$A'' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ se prendo $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

è cambiamento di coordinate proiettive che porta $\overline{\mathscr{C}}$

in forma $2x_0'^2 + 4x_1'^2 - 4x_2' = 0$

poi basta comporre M con

$$N = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

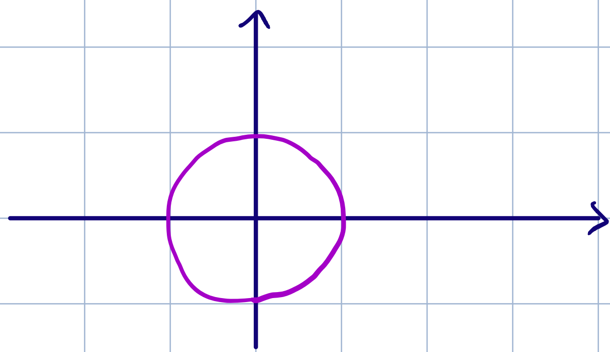
e abbiamo il cambio di coordinate proiettive richiesto, associata alla matrice

$$N \cdot M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{-1}{2\sqrt{2}} & \frac{3}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{4\sqrt{2}} & \frac{1}{4\sqrt{2}} & \frac{-1}{4\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

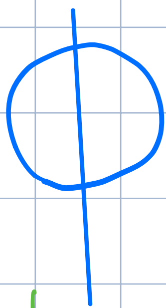
$$\begin{pmatrix} x_0'' \\ x_1'' \\ x_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{-1}{2\sqrt{2}} & \frac{3}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{4\sqrt{2}} & \frac{1}{4\sqrt{2}} & \frac{-1}{4\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

2)

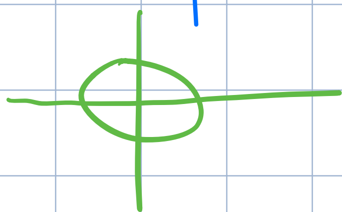
A



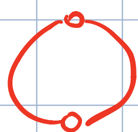
B



C



D



E

a) Ricordiamo che uno spazio vettoriale è separabile se contiene un sottoinsieme numerabile e denso. Questi spazi sono tutti separabili.

Vale in generale che i sottospazi di uno spazio metrico separabile sono separabili, ma non l'abbiamo verificato in classe.

E' facile però mostrare dei sottoinsiemi densi e numerabili per ciascuno dei sottospazi: infatti basta prendere

$A \ (B, C, D, E) \ \cap \mathbb{Q}^2$ e osservare che sono numerabili e densi.

b) Ricordiamo che un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ con la topologia euclidea è compatto sse è chiuso e limitato rispetto alla metrica euclidea (Teo di Heine – Borel)

A, B e C sono gli zeri di funzioni continue da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$, quindi sono chiusi in $\mathbb{R}^2$

A è limitato, B e C no, quindi

A è compatto, B e C no

D non è chiuso in $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_e)$, infatti $\overline{D} = A \neq D$

(ma è limitato)

E è chiuso ma non è limitato

Quindi D ed E non sono compatti.

(c) A, B e C sono connessi per archi quindi connessi

D ed E non sono connessi:

$$D = \underbrace{\{x>0\} \cap D}_{D_1} \sqcup \underbrace{\{x<0\} \cap D}_{D_2}$$

aperti non vuoti in D

(e chiusi)

$$E = \underbrace{\{0\} \times \mathbb{R}}_{D_1} \sqcup \underbrace{\{1\} \times \mathbb{R}}_{D_2}$$

aperti non vuoti in E

(e chiusi)

Le componenti connesse di D sono D_1 e D_2

Le componenti connesse di E sono E_1 ed E_2

(d) A è compatto mentre gli altri no: A non è omeomorfo agli altri perché la compattezza è una proprietà topologica.

B e C non sono omeomorfi a D né ad E perché B e C sono connessi, D ed E no. (e la connessione è proprietà topologica)

D ed E sono omeomorfi

Verifichiamo che $A \not\approx B$

$\forall\, p \in A \quad A \setminus \{p\}$ è connesso per archi $\Rightarrow$ connesso

Invece se prendo $q = (0,1)$ $\quad B \setminus \{q\}$ ha 2 componenti connesse. $\Rightarrow \nexists$ omeomorfismo da B ad A.

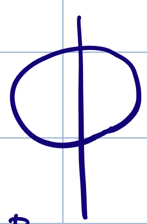
(se per assurdo $\exists\, \varphi : B \to A$ omeo,

$\varphi|_{B\setminus\{q\}} : B \setminus \{q\} \longrightarrow A \setminus \{\varphi(q)\}$ sarebbe

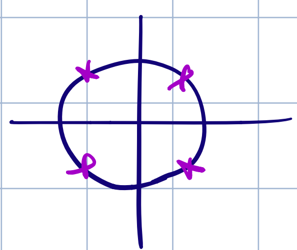
omeomorfismo da sconnesso a connesso)

Allo stesso modo si vede che

$B \not\approx C$



B



C

Ad esempio per C esistono 4 punti P_1, P_2, P_3, P_4 tali che $C \setminus \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ è connesso, mentre se tolgo 4 punti qualsiasi da B ottengo sempre uno spazio sconnesso.

Suddivisione in classi di omeomorfismo:

$\{A\} \quad \{B\} \quad \{C\} \quad \{D, E\}$