Es n° 1 (Pirola 27/9/17)

Sia Oxy un sistema di riferimento ortonormale in uno sp. euclideo di dim 2. Si consideri il fascio di coniche

$$C_\alpha = \{(x,y) : 9x^2 + 6\alpha xy + 9y^2 + x = 0, \ \alpha \in \mathbb{R}\}$$

1. Dire la classificazione affine delle coniche C_α del fascio
2. Dire se per qualche $\alpha \neq 0$ la conica C_α è equivalente dal pto di vista euclideo a C_0.

— o —

1. Come prima cosa scriviamo la matrice A_α associata a C_α, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 9 & 3\alpha \\ 0 & 3\alpha & 9 \end{pmatrix}$$

[Ricordiamo che C_α è descritta dall'equaz.

$$(x \ y) \ A_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \ ]$$

Studiamo il rango di A_α (è proprietà affine della C_α)

$$\det A_\alpha = \begin{vmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 9 & 3\alpha \\ 0 & 3\alpha & 9 \end{vmatrix} = -1/2 \begin{vmatrix} 1/2 & 3\alpha \\ 0 & 9 \end{vmatrix} = -1/2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \neq 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Proseguiamo con la classificazione studiando il rango della sottomatrice $A_{0,(\alpha)}$.

Nel nostro caso $A_0 = \begin{pmatrix} 9 & 3\alpha \\ 3\alpha & 9 \end{pmatrix}$ ⇝ $\det A_0 = 0 \Rightarrow C_\alpha$ è una parabola

$\det A_0 \neq 0 \Rightarrow C_\alpha$ è una conica a centro.

$$\det A_0 = \begin{vmatrix} 9 & 3\alpha \\ 3\alpha & 9 \end{vmatrix} \rightsquigarrow 81 - 9\alpha^2 = 0$$

$$9(9-\alpha^2) = 0$$

• Per $\alpha = \pm 3$ $\det A_0 = 0 \Rightarrow C_3, C_{-3}$ sono parabole

• Per $-3 < \alpha < 3$ $\det A_0 > 0 \Rightarrow C_\alpha$ è un'ellisse

$\alpha < -3 \cup \alpha > 3$ $\det A_0 < 0 \Rightarrow C_\alpha$ è un'iperbole

Nel caso in cui C_α è una parabola o un'iperbole per il teor di classificazione affine delle coniche in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ abbiamo finito: C_α è affinemente equivalente a

• $y^2 - x = 0$ per $(\alpha = \pm 3)$

• $x^2 - y^2 - 1 = 0$. $\alpha < -3 \cup \alpha > 3$

Nel caso in cui $-3 < \alpha < 3$ manca da capire se l'ellisse è a pti reali o no.
A questo pto basta esibire un pto reale ~~(x,y)~~ che soddisfa l'equazione e abbiamo finito.
Ci accorgiamo che per esempio $P(0,0)$ soddisfa l'equaz di C_α $\forall \alpha$ (in particolare per i valori $\alpha \in (-3,3)$ che ci interessano) $\Rightarrow$

C_α è affinemente equivalente a • $x^2 + y^2 - 1 = 0$ per $\alpha \in (-3,3)$

CLASSIFICAZIONE AFFINE CONCLUSA

2. Come prima cosa ricaviamo l'equazione che descrive

$$C_0 \ : \ 9x^2 + 9y^2 + x = 0$$

Se C_α e C_0 sono equivalenti dal pto di vista euclideo $\Rightarrow$ lo sono anche dal pto di vista affine.
Dunque ci dovremo interessare solo delle C_α, $\alpha \in (-3,3)$.

Il teorema di classificazione euclidea delle coniche ci richiede di portarle nella loro forma canonica.

Quella dell'ellisse a pti reali è

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Per eliminare il termine $6axy$ dall'equazione di C_a utilizziamo il teor spettrale e diagonalizziamo A_0. Cerchiamo dunque $M \in O(2)$ per cui $B_0 = M^t A_0 M$ sia diagonale

La M desiderata è ottenuta prendendo la matrice degli autovett. (sono ortogonali) e normalizzandola.

Calcoliamo gli autoval, autovettori di A_0:

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & 3a \\ 3a & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (9-\lambda)^2 - 9a^2 = 0$$

$$\lambda^2 - 18\lambda + 9(9-a^2) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 9 \pm 3a$$

L'autospazio relativo a λ_1 è

$$V_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} -3a & 3a \\ 3a & -3a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} 3a & 3a \\ 3a & 3a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Sono ortogonali (come dice il teor spettrale) ma vanno normalizzati per ottenere

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

L'equazione $(x'\ y')\, M^t A M \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 0$ è equival a $(x\ y)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

In particolare la corrispondente sottomatrice $B_0 = M^t A_0 M$ diventa diagonale!

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ← coordinate in cui esprimo l'equaz (mi sparisce il termine xy)

Ricaviamo $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M^t \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ e sostituiamo nell'equazione di C_a:

$$\frac{9}{2}(x'+y')^2 + \frac{6a}{2}(x'+y')(x'-y') + \frac{9}{2}(x'-y')^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y') = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(9+3a)(x')^2 + (9-3a)(y')^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y') = 0 \qquad (*)$$

notare gli autovalori!

Ora dobbiamo eliminare il termine di grado 1. La conica è a centro quindi consideriamo la traslazione

$$\begin{cases} x' = \bar{x} - \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{1}{9+3a} \\ y' = \bar{y} - \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{1}{9-3a} \end{cases} \iff$$

corrisponde a

$$\begin{cases} x' = \bar{x} - \frac{a_{01}}{a_{11}} \\ y' = \bar{y} - \frac{a_{02}}{a_{22}} \end{cases}$$

quando l'equazione è del tipo

$$a_{11}(x')^2 + a_{22}(y')^2 + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0$$

E sostituiamo in $(*)$:

$$(9+3a)\left(\bar{x} - \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{1}{9+3a}\right)^2 + (9-3a)\left(\bar{y} - \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{1}{9-3a}\right)^2$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\bar{x} - \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{1}{9+3a}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\bar{y} - \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{1}{9-3a}\right)$$

L'equazione diventa

$$(9+3a)\left(\bar{x}^2+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(9+3a)^2}\right)-\frac{2}{8}\,\frac{1}{9+3a}+$$

$$(9-3a)\left(\bar{y}^2+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(9-3a)^2}\right)-\frac{2}{8}\,\frac{1}{9-3a}=0$$

$$\leadsto\ \frac{\bar{x}^2}{\frac{1}{9+3a}}+\frac{\bar{y}^2}{\frac{1}{9-3a}}=\frac{9}{2(9-3a)(9+3a)}$$

$\Rightarrow$ l'equazione in forma canonica sarà:

$$\frac{\bar{x}^2}{\frac{9}{2(9+3a)^2(9-3a)}}+\frac{y^2}{\frac{9}{2(9+3a)(9-3a)^2}}$$

C_a, $a\in(-3,3)$ e C_0 sono classificare dal punto di vista euclideo in base a

$$\alpha_a^2=\frac{9}{2(9+3a)^2(9-3a)}\qquad \alpha_0^2=\frac{9}{2(9)^2\cdot 9}=\frac{1}{2\cdot 81}$$

$$\beta_a^2=\frac{9}{2(9+3a)(9-3a)^2}\qquad \beta_0^2=\frac{1}{2\cdot 81}$$

$$\uparrow$$
$$C_a$$

Per essere equivalenti dal pto di vista euclideo si dovrebbe trovare

a t.c. $\begin{cases}\alpha_a^2=\alpha_0^2\\ \beta_a^2=\beta_0^2\end{cases}$ con $a\in(-3,3)$

ma il sistema non ha soluzioni.

ES n° 2 (Pirola 22/2/18)

Sia Oxy un sist di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dim 2. Si considera il fascio di coniche

$$C_\alpha = \{(x,y): 2x^2 + 8\alpha y^2 + 2y - \alpha = 0, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

1. Dare la classificazione delle coniche C_α del fascio
2. Dire se per qualche valore di $\alpha \neq 0$ C_α è equival dal pto di vista affine ed euclideo a C_0.

— o —

1. Come primo passaggio scriviamo la matrice $A_\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$, associata a C_α:

$$\begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 8\alpha \end{pmatrix}$$

Studiamo il rango della matrice

$$\det A_\alpha = \begin{vmatrix} -\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 8\alpha \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -\alpha & 1 \\ 1 & 8\alpha \end{vmatrix} = 2(-8\alpha^2 - 1)$$

$$= -2(8\alpha^2+1) = 0 \quad \text{mai se } \alpha \in \mathbb{R}$$

$\rightarrow$ C_α è non degenere $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

Proseguiamo la classificazione studiando il rango della sottomatrice

$$A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8\alpha \end{pmatrix} \qquad \det A_0 = 16\alpha$$

$\rightarrow$ $\det A_0 = 0$ se $\alpha = 0$: C_0 è una parabola affinem equivalente a $y^2 - x = 0$

$\rightarrow$ $\det A_0 > 0$ se $\alpha > 0$: C_α è affinemente equivalente ad un'ellissi

$\rightarrow$ $\det A_0 < 0$ se $\alpha < 0$: C_α è affinemente equival all'iperbole $x^2 - y^2 - 1 = 0$

Manca solo da capire se C_a, con $a>0$, definisca un'ellissi a pti reali o se il suo supporto in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ sia vuoto.
Ma se si esibisce un pto si può concludere.

Supponiamo di prendere C_a e di risolvere l'equazione per

$y=0$: C_a : $2x^2=a$

Tale equazione ha soluzione (poiché per ipotesi $a>0$)

$\Rightarrow$ abbiamo che $\left(\pm\sqrt{\frac{a}{2}}, 0\right) \in C_a \quad \forall a>0$

$\rightsquigarrow$ C_a, $a>0$, è un'ellisse a pti reali affinemente equivalente

a: $x^2+y^2-1=0$

2. Dire se per qualche $a\neq 0$ C_a è equivalente dal pto di vista affine e euclideo a C_0:

poiché C_0 : $x^2+y=0$ è una parabola

possiamo concludere affermando che non ci sono valori di $a\neq 0$ per cui C_a è equivalente a C_0 in E^2.
Per esserlo infatti dovrebbe essere anche affinemente equival a C_0 ma dalla classificazione affine svolta precedentemente emerge che l'unico valore per cui C_a è nella classe affine della parabola è $a=0$.

ES. N° 3 Classificare le seguenti coniche di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ determinandone rango ed equazione canonica

$$\mathcal{C}_1 : x_0x_1 + x_1x_2 + x_0x_2 = 0$$

$$\mathcal{C}_2 : x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - 2x_0x_1 + 2x_0x_2 - 2x_1x_2 = 0$$

— o — o —

Costruiamo le matrici A_1 e A_2 associate a $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ e determiniamone il rango (è una proprietà proiettiva)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ricordiamo che a_{ii} è il coeff di x_i^2 e

a_{ij} $(i \neq j)$ è $\frac{1}{2} \cdot$ (coeff di x_{ij})

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \neq 0$$

$\Rightarrow rg(A_1) = 3 \Rightarrow$ la conica $\mathcal{C}_1$ è NON degenere

Il teorema di classificazione proiettiva delle coniche non degeneri ci presenta due classi a cui $\mathcal{C}_1$ può appartenere.

$\rightarrow$ o la classe di $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$

$\rightarrow$ o " " $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$

Cerchiamo di capire se sia possibile esibire un pto ~~reale~~ di $\mathcal{C}_1$

$x_0(x_1 + x_2) + x_1x_2 = 0$ scelgo $x_1 = x_2$

$2x_0x_1 + x_1^2 = 0 \rightarrow x_1(x_1 + 2x_0) = 0 \rightarrow x_1 = -2x_0$

scelgo $x_0 = 1$, $x_1 = x_2 = -2$ $\rightsquigarrow [1 : -2 : -2] \in Supp(\mathcal{C}_1)$

Concludendo dunque $\mathcal{C}_1$ è proiettivam. equivalente a

$$x_0^2+x_1^2-x_2^2=0.$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

uguali

uno è il prodotto dell'altro per (-1)

$\Rightarrow rg(A_2)=1 \Rightarrow$ la conica $\mathcal{C}_2$ è DOPPIAMENTE degenere

$\Rightarrow$ è proiettivamente equivalente a

$$x_0^2=0.$$

E se si volessero classificare $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$??

$\mathbb{C}$ è campo chiuso!

Il teorema di classificazione proiettiva delle coniche di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ci fornisce solo 3 classi di equivalenza, una per ogni rango di A.

Dunque

$\rightarrow$ poiché $rg(A_1)=3 \Rightarrow \mathcal{C}_1$ è proiettivam. equivalente in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ a $x_0^2+x_1^2+x_2^2=0$

$\rightarrow$ poiché $rg(A_2)=1 \Rightarrow \mathcal{C}_2$ è proiettivam. equivalente in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ a $x_0^2=0$.