ES N° 1

Sia M lo spazio metrico $(\mathbb{R}, d)$ dove d è la metrica euclidea. Sia M_0 lo spazio metrico $(\mathbb{R}, d_0)$, dove d_0 è la metrica discreta, ossia

$$d_0(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x=y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

1. Dimostrare che ogni funzione $f: M_0 \to M$ è continua
2. Dimostrare che $\nexists$ una funzione iniettiva e continua da M in M_0

— o —

(1) Ricordiamo che una funzione tra due spazi metrici è continua se e solo se per ogni aperto U di M l'insieme $f^{-1}(U)$ è aperto in M_0.

In particolare, utilizzando le palle metriche, dobbiamo mostrare ~~supponiamo~~ che

$$\forall x \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \text{tc} \ d_M(f(x), f(y)) < \varepsilon \ \text{se} \ d_{M_0}(x,y) < \delta \quad (*)$$

Nel nostro caso però $d_{M_0}(x,y) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$

Per dimostrare la continuità in x è necessario, $\forall \varepsilon_x > 0$, esibire un $\delta_x > 0$ che mi renda vera $(*)$.

Ma allora basta scegliere $0 < \delta < 1$ (per esempio $\delta = 1/2$) e si conclude:

$$\forall \varepsilon_x > 0 \ \exists \delta_x = 1/2 \ : d_M(f(x), f(y)) < \varepsilon \ \text{se} \ \underbrace{d_{M_0}(x,y) < 1/2}_{\text{mi forza } y=x}$$

$$\Rightarrow d_M(f(x), f(x)) = 0 < \varepsilon : \text{vero!}$$

Poiché la mia scelta non dipende da x la continuità vale su tutto $\mathbb{R}$.

2. Per assurdo $\exists\ f: M \to M_0$ continua e iniettiva.

Esprimiamo la continuità in x:

$\forall \varepsilon_x > 0\ \exists \delta_x > 0 : d_{M_0}(f(x), f(y)) < \varepsilon_x$ se $d_M(x,y) < \delta_x$

Si prenda $\varepsilon_x = \frac{1}{2}$ e $y \neq x$ t.c. $d_M(x,y) < \delta_x$

$\Rightarrow$ la continuità in x ci dice che $d_{M_0}(f(x), f(y)) < \frac{1}{2}$

Per definizione di d_0, però, $d_{M_0}(f(x), f(y))$ può essere $< \frac{1}{2}$ solo quando è $=0$, ossia quando $f(x) = f(y)$.
Ma allora l'iniettività non vale!!

ES N° 2

Sia X un insieme e $\infty \in X$ un elemento fissato. Verificare che $\mathcal{T} = \{A \subset X : \infty \notin A$ o A^c è finito$\}$ definisce una topologia.

— o —

Verifichiamo che sono soddisfatte le 3 condizioni che definiscono una topologia

1. $\emptyset \in \mathcal{T}$: $\infty \notin \emptyset$ per definizione di insieme vuoto
   $X \in \mathcal{T}$: $X^c = \emptyset$: è finito

2. Siano $A, B \in \mathcal{T}$ verifichiamo che $A \cap B \in \mathcal{T}$. Possono verificarsi i seguenti casi
   - $\to A, B \in \mathcal{T}$ poiché $\infty \notin A$ e $\infty \notin B \Rightarrow \infty \notin A \cap B \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T}$
   - $\to A, B \in \mathcal{T}$ poiché $\infty \in A$ ma A^c finito e $\infty \notin B$
     $\Rightarrow \infty \notin A \cap B \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T}$ (vale la stessa conclusione con ruoli di A e B ribaltati)
   - $\to \infty \in A$ e $\infty \in B$ ma A^c e B^c finiti $\Rightarrow$
     $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$: unione finita di finiti è finita
     $\Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T}$

3_ Siano $A_i \in \tau$, $i \in I$ $\Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$?

Può accadere che:

- $\infty \notin A_i \ \forall i \Rightarrow \infty \notin \bigcup A_i \Rightarrow \bigcup A_i \in \tau$
- $\infty \in A_{\bar{i}}$ per un certo $\bar{i} \in I \Rightarrow A_{\bar{i}}^c$ è finito (perché $A_{\bar{i}} \in \tau$)

$\Rightarrow \left(\bigcup A_i\right)^c = \bigcap A_i^c$: ne abbiamo uno $(A_{\bar{i}}^c)$ che è finito $\rightarrow$ l'intersezione è finita

$\rightarrow \bigcup A_i \in \tau$

ES N° 3

Si consideri la classe τ di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ costituita da

- $\mathbb{R}, \phi$
- $A_q = (q, \infty)$ con $q \in \mathbb{Q}$

τ è una topologia?

— o — o —

Verifichiamo se sono verificate le condizioni che definiscono una top.

1- $\mathbb{R}, \phi \in \tau$ per costruzione

2- Siano A_q e $A_{q'} \in \tau \Rightarrow A_q \cap A_{q'} \in \tau$?

$\mathbb{R}$ è ordinato quindi $(q, \infty) \cap (q', \infty) = (\bar{q}, \infty)$ con $\bar{q} = q$ se $q \geq q'$, $\bar{q} = q'$ se $q' \geq q$

3_ Si verifica un problema studiando unioni qualsiasi di elementi $A_q \in \tau$.

Per esempio consideriamo la famiglia di sottoins di $\mathbb{R}$

$$\underbrace{\{A_q;\ q \in \mathbb{Q},\ q > \sqrt{2}\}}_{= \circledast} \Rightarrow \bigcup_{\substack{q \text{ che} \\ \text{verifica} \\ \circledast}} A_q = (\sqrt{2}, \infty) \notin \tau \text{ perché } \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

ES N°4 Sia τ la classe dei sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ (senza lo 0) costituita da ϕ e da tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ della forma

$$E_n = \{n, n+1, n+2, \dots\} \text{ con } n \in \mathbb{N}$$

1. Si dimostri che τ è una topologia su $\mathbb{N}$
2. Si elenchino tutti gli insiemi aperti contenenti il n°6
3. Si determino i punti di accumulazione dell'insieme $A = \{4, 13, 28, 37\}$
4. Si determino i chiusi di τ
5. Si determini la chiusura degli insiemi
   $B = \{7, 24, 85\}$
   $C = \{3, 6, 9, 12, \dots\}$

— o — o —

(1) Verifichiamo che siano soddisfatte le condizioni che definiscono una topologia

1. $\phi \in \tau$ per costruzione
   $E_1 = \{1, 2, \dots\} = \mathbb{N} \in \tau$
   $\Big\} \phi, \mathbb{N} \in \tau$ ok

2. Siano dati E_i e $E_j \in \tau$. $E_i \cap E_j \in \tau$?
   Poiché $\mathbb{N}$ è ordinato $E_i \cap E_j = \{k, k+1, \dots\}$
   con $k \in \mathbb{N}$ e $k = \begin{cases} i & \text{se } i \geq j \\ j & \text{viceversa} \end{cases}$

3. Si consideri una sottoclasse di τ
   $$\mathcal{A} = \{E_n, n \in I\} \Rightarrow \bigcup_{n \in I} E_n \in \tau \,?$$

I è un qualche insieme di interi positivi $\Rightarrow \exists\, n_0 = \min_{n \in I} n$

$$\Rightarrow \bigcup \{E_n : n \in I\} = \{n_0, n_0+1, \dots\} = E_{n_0} \in \tau$$

$$\Rightarrow \bigcup E_n \in \tau \text{ ok!}$$

2- Per costruzione tutti gli aperti della topologia sono del tipo $E_n = \{n, n+1 \dots \}, n \in \mathbb{N}$

Ciò implica che gli aperti di τ che contengono 6 sono solo

$E_1 = \{1, 2, 3, \dots\}$ $\quad$ $E_4 = \{4, 5, 6, \dots\}$

$E_2 = \{2, 3, 4, \dots\}$ $\quad$ $E_5 = \{5, 6, 7, \dots\}$

$E_3 = \{3, 4, 5, \dots\}$ $\quad$ $E_6 = \{6, 7, \dots\}$

3- Punti di accumulazione di A.

Si ricorda che x_0 è un pto di accumulazione per A se $\forall\, \mathcal{I}_{x_0}$ intorno del punto x_0 $\exists$ almeno un elemento $x \neq x_0$ tc $x \in A \cap \mathcal{I}_{x_0}$

$A = \{4, 13, 28, 37\}$

Ricordiamo inoltre che un intorno $\mathcal{I}_{x_0}$ di un pto $x_0 \in \mathbb{N}$ è un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ contenente un aperto $E_n \in \tau$ tale che $x_0 \in E_n \subseteq \mathcal{I}_{x_0}$.

Come osservato nel punto 2 dell'esercizio gli insiemi aperti contenenti un certo x_0 sono tutti gli insiemi $E_n, n \leq x_0$.

Nel caso dell'insieme A dunque

$\forall\, x_0 \leq 36$ $\exists$ almeno un aperto (E_{x_0}) che contiene un elemento $x = 37 \neq x_0$ (che è per ipo ≤ 36) tale che $37 \in A \cap E_{x_0}$.

Ciò implica che tutti gli elementi $\{1, 2, \dots 36\}$ sono pti di accumulazione per A.

D'altra parte, se $x_0 > 36$ l'insieme aperto E_{x_0}:

→ interseca A nel solo punto $x_0 = 37$

→ non interseca A

⇒ tutti gli elem $x_0 > 36$ non sono di accumulazione per A.

4 Ricordiamo che un sottoinsieme C di $(\mathbb{N}, \tau)$ è chiuso se e solo se $\mathbb{N} - C$ è aperto.

Rispetto alla nostra topologia gli aperti sono gli insiemi INFINITI $E_n = \{n, n+1, \dots\}$

Ciò significa che i chiusi della nostra topologia sono i loro complementari, ossia i sottoinsiemi FINITI del tipo

$$\mathbb{N} - E_n = \{1, \dots, m\} \text{ per qualche } m \in \mathbb{N}$$

Inoltre $\underset{\mathbb{N}-\mathbb{N}}{\overset{\|}{(\mathbb{N})^c}} = \emptyset$ e $\mathbb{N} - \emptyset = \emptyset^c = \mathbb{N}$ $\Rightarrow \mathbb{N}$ e $\emptyset$ sono anche chiusi.

5 Abbiamo catalogato i chiusi della topologia: $\{1, \dots m\}$, $m \in \mathbb{N}$

Sappiamo inoltre che la chiusura di un insieme $B \subset \mathbb{N}$ è data dall'intersezione di tutti i chiusi che contengono B.

$$\Rightarrow \bar{B} = \bigcap_{m \geq 85} \{1, \dots, m\}$$

per contenere $B = \{7, 24, 85\}$ abbiamo bisogno di tutti i chiusi del tipo $\{1, 2, \dots, 85\}$, $\{1, 2, \dots, 86\}, \dots \{1, 2, \dots, m\}$ $m \geq 85$

Sfruttando l'ordine di $\mathbb{N}$ si ottiene che $\bar{B} = \{1, \dots 85\}$

Poichè C è infinito ~~[illegible]~~ ogni chiuso di τ che me lo contiene deve essere lui stesso infinito $\Rightarrow$ la chiusura è data dall'unico chiuso di τ che è infinito, ossia l'intero insieme $\mathbb{N}$

$$\Rightarrow \bar{C} = \overline{\{3, 6, 9, \dots\}} = \mathbb{N}.$$

ES. N° 5 | Sia data $f: X \to Y$ una funzione da un insieme non vuoto X in uno spazio topologico $(Y, \mathcal{U})$. Si consideri la famiglia di sottoinsiemi di X
$$\tau = \{ f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U} \}$$
Dimostrare che τ definisca una top. su X.

— o — o —

1. $\phi \in \tau$? $f^{-1}(\phi) = \phi$ e $\phi \in \mathcal{U}$ quindi ok.

$X \in \tau$? $f^{-1}(Y) = X$ e $Y \in Y$ " "

2. Siano dati due $V_1, V_2 \in \tau$. $V_1 \cap V_2 \in \tau$?

Per costruzione $V_1 = f^{-1}(U_1)$ con $U_1 \in \mathcal{U}$
$V_2 = f^{-1}(U_2)$ con $U_2 \in \mathcal{U}$

Ma allora $V_1 \cap V_2 = f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2) = f^{-1}(U_1 \cap U_2)$

Poiché $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$ (essendo U_i aperti di $\mathcal{U}$ e $\mathcal{U}$ una topologia)

$\Rightarrow$ $V_1 \cap V_2 \in \tau$

3. Sia data una fam $V_i \in \tau$, $i \in I$ $\Rightarrow \bigcup_{i \in I} V_i \in \tau$

Per costruzione $V_i = f^{-1}(U_i)$, $U_i \in \mathcal{U}$ $\forall i$
$$\Rightarrow \bigcup_i V_i = \bigcup_i f^{-1}(U_i) = f^{-1}\left(\bigcup_i U_i\right)$$

poiché $\mathcal{U}$ è una top. e $U_i \in \mathcal{U}$ $\Rightarrow$ $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{U}$ $\Rightarrow \bigcup V_i \in \tau$.

OSS: Rispetto a tale scelta di topologia: $f: (X, \underbrace{f^{-1}\mathcal{U}}_{= \tau}) \to (Y, \mathcal{U})$ è una funzione continua.

Applicando la definizione si vede che $\forall U \in \mathcal{U}$ $f^{-1}(U) \in \tau$, ossia preimmagini di aperti sono aperte $\Rightarrow f$ continua!

ES. N° 7 In $\mathbb{R}^2$ si consideri la fam $\mathcal{T}$ formata dall'insieme $\emptyset, \mathbb{R}^2$ e da tutti i dischi aperti

$$B_r = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<r^2\}, \quad r>0$$

1. Dimostrare che è una top.
2. Definire la chiusura di $Z=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy=1\}$

— o —

(1) Verifichiamo che siano soddisfatte le cond che definiscono una top:

1- $\emptyset, \mathbb{R}^2 \in \mathcal{T}$ per costruzione

2- Siano dati due dischi aperti

$B_{r_1}, B_{r_2} \in \mathcal{T} \Rightarrow B_{r_1}\cap B_{r_2} \in \mathcal{T}$? sì, si tratta di prendere il disco con il raggio più piccolo

3. Unione qualsiasi di dischi aperti è $\in \mathcal{T}$? sì, basta prendere il disco con raggio $r = \sup_{i\in I} |r_i|$ dove $B_{r_i}\in\mathcal{T}, i\in I$

Notare che fondamentale nella costruzione è avere tutte le palle centrate nello stesso punto.

(2) Prima di definire la chiusura di Z caratterizziamo i chiusi di $\mathcal{T}$.

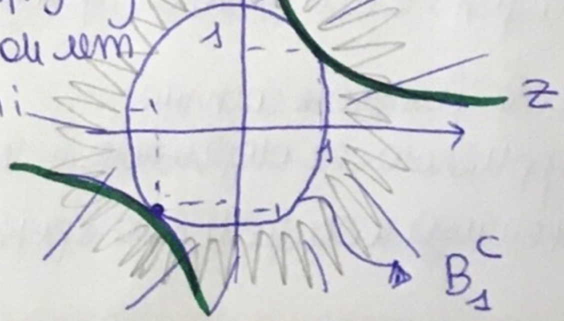
Per definizione i chiusi di $\mathcal{T}$ sono gli insiemi

$$B_r^c := \{\underbrace{(x,y)\in\mathbb{R}^2}_{\mathbb{R}^2 - B_r} : x^2+y^2\geq r^2\}, \quad r>0$$

$\Rightarrow$ sono tutti i complementari delle palle aperte. Ora disegniamo $Z=\{xy=1\}$

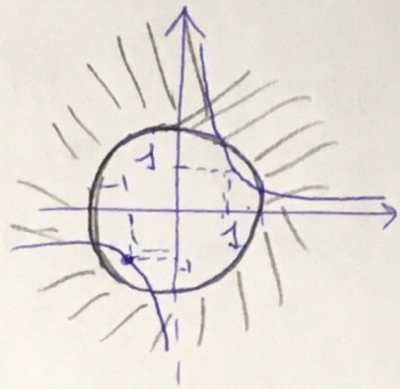
Come visto precedentemente la chiusura di un insieme è data dall'intersezione di tutti i chiusi che lo contengono

$$\overline{Z} = \bigcap_{0<r\leq 1} B_r^c = B_1^c$$

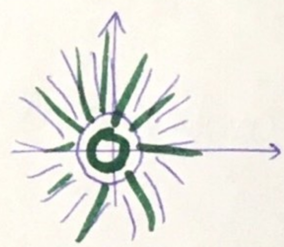


Dalla figura emerge che tutti i chiusi di τ che contengono Z sono tutti i complementari dei dischi B_r, $r \in [0,1]$

Infatti se B_r ha $r>1$
$\Rightarrow B_r^C$ non contiene più tutta Z!



Allora $\bar{Z}$ si ottiene intersecando tutte le palle B_r^C complementari con $r \in (0,1]$. Sempre dalla figura emerge che l'intersezione è proprio data da B_1^C



$B_1^C \cap B_{1/2}^C = B_1^C$