ES N° 1 

Sia $X=\{2,3,\dots\}$ l'insieme dei numeri interi maggiori o uguali a 2.
Per ogni $n\in X$ definiamo gli insiemi
$$U_n=\{x\in X : x \text{ divide } n\}$$
a- Dimostrare che gli insiemi $U_n$, al variare di $n\in X$, formano una base per una topologia $\mathcal{T}$ su $X$
b- lo spazio topologico $(X,\mathcal{T})$ è T2?
c- Per ogni $n\in X$ descrivere la chiusura di $\{n\}$ in $(\mathcal{T},X)$

— o —

a- Il lemma della base ci dice che una famiglia di sottoinsiemi di $X$ è una base per una topologia se
1. $X=\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$
2. $\forall A,B\in\mathcal{B} \Rightarrow A\cap B$ è unione di elementi di $\mathcal{B}$

Nel nostro caso dobbiamo studiare la famiglia $U_n$, $n\in X$.
1. Sicuramente $X$ è ricoperto dagli insiemi $U_n$, $n\in X$.
Infatti ~~per~~ vale $\forall x\in X\ \exists n\in X$ t.c. $x\in U_n$:
banalmente basta prendere $n=x$ e otteniamo $x\in U_n$.
Vale sempre $x|x$ (notazione per dire $x$ divide $x$)

2. Supponiamo di considerare due insiemi qualsiasi $U_n$ e $U_m$
allora dobbiamo studiarne l'intersezione.
Si supponga $U_n\cap U_m\neq\emptyset \Rightarrow U_n\cap U_m$ è unione di elementi della famiglia che stiamo considerando?
$U_n\cap U_m=\{x\in X : x|n \text{ e } x|m\}$ : gli elementi nell'intersezione dividono sia $n$ sia $m$. Ma allora tali elementi sono anche divisori di $MCD(n,m)$ (max. comune divisore : MCD)

$\rightsquigarrow$ questo implica che tali elementi appartengono a $U_{MCD(n,m)}$ ②

$\Rightarrow U_n \cap U_m = U_{MCD(n,m)}$ allora abbiamo verificato la proprietà 2 del lemma della base

ⓑ- $(X, \tau)$ è T2?

Uno spazio topologico è T2 se $\forall x, y \in X \ \exists A_x, A_y$ aperti di $\tau$, contenenti x e y rispettivamente, tali che $A_x \cap A_y = \emptyset$.

Nel nostro caso abbiamo una base per $\tau \Rightarrow$ gli aperti di $\tau$ sono unioni qualsiasi di insiemi $U_n$, $n \in X$.

Negazione della proprietà T2: X non è T2 se $\exists x, y \in X$ t.c.

$\forall A_x, A_y$ aperti contenenti x e y $\Rightarrow A_x \cap A_y \neq \emptyset$.

Per dimostrare che lo spazio NON è T2 basta esibire due punti x e y per cui ogni aperto che li contiene ci fornisce intersezione $A_x \cap A_y \neq \emptyset$.

Prendiamo $x = 2$ e $y = 4$. Gli aperti in $\tau$ sono unioni di ~~[illegible]~~ insiemi $U_n$

In particolare supponiamo: $4 \in A_4 \Rightarrow$ c'è almeno un $\bar{n} \in X$ tale che

$4 \in U_{\bar{n}} \underset{\text{per costruzione}}{\Rightarrow} 4 \mid \bar{n} \Rightarrow \bar{n} = 4 \cdot k = 2 \cdot (2k)$

$\bar{n}$ è multiplo di 4 per un certo $k \in \mathbb{N}$

per costruzione di $U_{\bar{n}}$

$\Rightarrow 2 \in U_{\bar{n}}$.

Poiché per definizione un aperto $A_2$ contenente 2 contiene il pto 2 $\Rightarrow$

abbiamo $A_2 \cap A_4 \neq \emptyset \Rightarrow$ X non è T2 c- Descrivere rispetto a $\mathcal{T}$ la chiusura di $\{n\}$, $n \in X$.

Un pto $x \in X$ appartiene a $\overline{\{n\}} \iff \forall A_x$ aperto contenente $x$ si ha $\{n\} \cap A_x \neq \emptyset$.

Sia $x$ un multiplo di $n \Rightarrow x = nk \Rightarrow x \in \overline{\{n\}}$

Infatti ogni aperto di $\mathcal{T}$ contenente $x$ è per costruzione unione di insiemi $\bigcup_i U_i =: A_x$

Allora poiché $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$ $\exists \bar{i} \in I$ t.c. $x \in U_{\bar{i}}$. Quindi, per costruzione, $\bar{i} = \bar{k} \cdot x$

Ma allora $\bar{i} = \bar{k}k \cdot n \Rightarrow n \in U_{\bar{i}} \Rightarrow \{n\} \cap A_x \neq \emptyset$.

$\Rightarrow \overline{\{n\}} = \{m \in X : m = k \cdot n, k \in \mathbb{N}\}$

$\boxed{\text{ES. N° 2}}$ Per ogni coppia di numeri interi $a, b \in \mathbb{Z}$ con $b > 0$ definiamo

$$N_{a,b} = \{a + kb : k \in \mathbb{Z}\}$$

Dimostrare che

1- La famiglia $\mathcal{B} = \{N_{a,b} : a, b \in \mathbb{Z}, b > 0\}$ è base di una top $\mathcal{T}$ su $\mathbb{Z}$

2- Ogni $N_{a,b}$ è aperto e chiuso in $\mathcal{T}$

3- Definiamo con $P \subset \mathbb{N}$ l'insieme dei num primi $\Rightarrow P$ è infinito (DIMOSTRAZIONE topologica!)

— o —

1- Per il lemma della base verifichiamo che

- $\bigcup_{\substack{a,b \in \mathbb{Z} \\ b>0}} N_{a,b} = \mathbb{Z}$

Questo è immediato perché $N_{1,1}$ ricopre tutto $\mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$

$$N_{1,1} = \{1 + k \ , k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$$

b. $\forall A, B \in \beta$ t.c. $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A \cap B$ è unione di elementi di $\beta$.

Questo significa che dobbiamo provare che $\forall x \in A \cap B$

$\exists C \in \beta$ t.c. $x \in C \subset A \cap B$

Prendiamo $A = N_{i,j}$ $B = N_{l,m}$ allora poiché $x \in A \cap B$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = i + \bar{k} j \\ x = l + \bar{\bar{k}} m \end{cases} \quad \text{con } \bar{k}, \bar{\bar{k}} \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow C = N_{x, jm}$ è ok.

Infatti $\cdot$ $x \in C = N_{x,jm} = \{x + kjm, k \in \mathbb{Z}\}$ $\Leftarrow$ prendo $k=0$ e ottengo $x$

$\cdot$ $C \subset A \cap B$ ossia $\forall y \in C \Rightarrow y \in A \cap B$

$y \in C \Rightarrow y = x + \tilde{k} jm$ per un $\tilde{k} \in \mathbb{Z}$

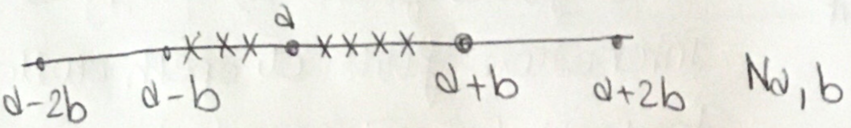
$$\Rightarrow y = i + \bar{k} j + \tilde{k} jm = i + j \underbrace{(\bar{k} + \tilde{k} m)}_{\in \mathbb{Z}} \Rightarrow y \in N_{i,j}$$

$$\Rightarrow y = l + \bar{\bar{k}} m + \tilde{k} jm = l + m \underbrace{(\bar{\bar{k}} + \tilde{k} j)}_{\in \mathbb{Z}} \Rightarrow y \in N_{l,m}$$

2- $\cdot$ $N_{a,b}$ è aperto per $\mathcal{T}$: questo è immediato per definizione di base di una top. Nel paragrafo precedente abbiamo mostrato che $\beta$ è base di una top $\mathcal{T}$ per $\mathbb{Z}$. Gli aperti sono unioni qualsiasi di $N_{a,b}$. In particolare $N_{a,b}$ è un aperto!

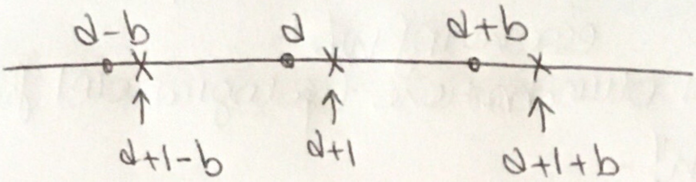
• $N_{a,b}$ è chiuso.

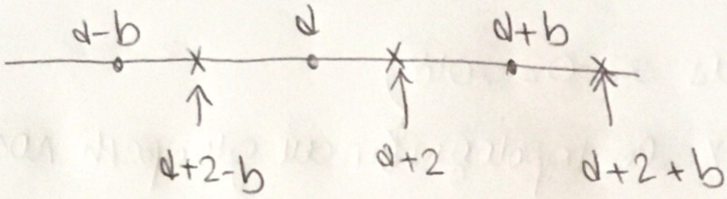
Dobbiamo provare che il suo complementare è un aperto



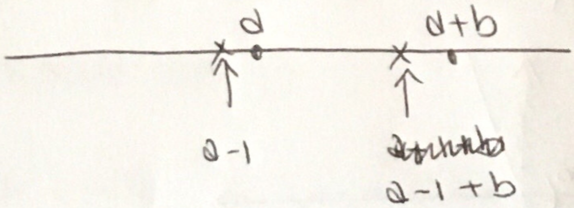

Dobbiamo beccare tutti i punti x non inclusi in $N_{a,b}$.

Dal disegno di $\mathbb{Z}$ capiamo che ci servono tutte le progressioni di questo tipo!




⋮ fino a




$$\Rightarrow N_{a,b}^{c} = \bigcup_{i \in (a,a+b)\cap\mathbb{Z}} N_{i,b}$$

⇒ è unione di aperti

⇒ $N_{a,b}$ è chiuso!

(3.) $\mathbb{Z} - \{-1,1\} = \bigcup_{p \in P} N_{0,p}$

→ x pari ⇒ $x \in N_{0,2}$

→ x dispari → x primo ⇒ $x \in N_{0,x}$, $x \in P$

→ x non primo ⇒ è multiplo dispari di un primo

$\Rightarrow \{-1,1\}^c = \bigcup_{p \in P} N_{0,p}$ $\Rightarrow \{-1,1\} = \left(\bigcup N_{0,p}\right)^c$

$\Rightarrow \{-1,1\} = \bigcap N_{0,p}^c$ : se $P$ fosse finito $\Rightarrow \{-1,1\}$ è intersezione finita di aperti della topologia. Ciò è assurdo!

Tutti i nostri aperti sono infiniti $\Rightarrow$ l'intersezione $\bigcap N_{0,p}^c$ deve per forza essere infinita!

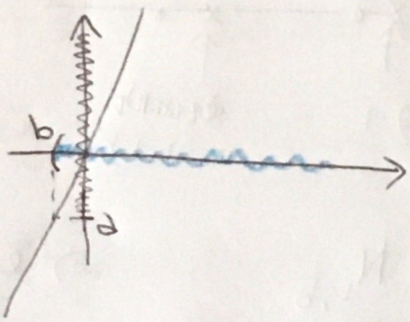
– questa è nota come la dimostrazione topologica del fatto che i num. primi sono infiniti! –

$\boxed{\text{ES. N° 3}}$ (Compito Pirola 22-02-2018)

Sia $X = \mathbb{R}$. Si consideri su $X$ la topologia $\tau$ in cui gli aperti non banali sono le semirette $U_a = \{x \in \mathbb{R} : x > a, a \in \mathbb{R}\}$.

Dire se le seguenti funzioni $f_i : X \to X$ sono continue.

* $f_1 : X \to X$
  $x \mapsto 2x$




Per verificare la continuità è necessario controllare che

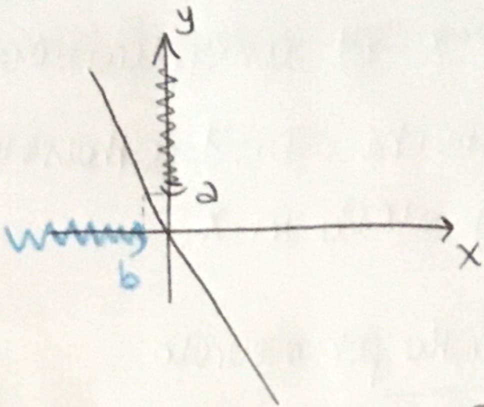
$f^{-1}(a, +\infty) = (b, +\infty)$ per qualche $b \in \mathbb{R}$ : vogliamo infatti che controimmagini di aperti siano aperte.

Dal grafico si vede chiaramente che $f^{-1}(a, +\infty) = (b, +\infty)$

$\Rightarrow f_1$ è continua!

$\circledast$ $f_2 : X \to X$

$x \mapsto -2x$



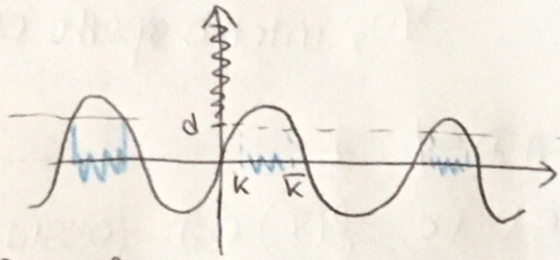

Stesso ragionamento di prima.

Si prenda la semiretta $(a, +\infty)$ sull'asse delle y. Quali sono le $x \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \in (a, +\infty)$? $\quad f^{-1}(a, +\infty) = (-\infty, b)$

Ma $(-\infty, b) \notin \tau \Rightarrow f_2$ NON è continua rispetto a questa topologia.

$\circledast$ $f_3 : X \to X$

$x \longmapsto \operatorname{sen} x$

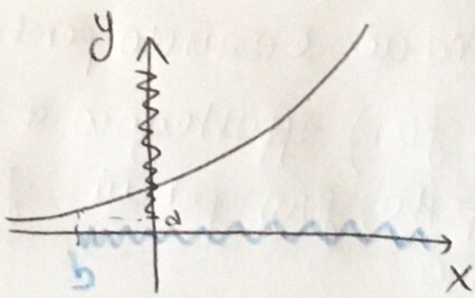



Consideriamo l'aperto $(a, +\infty)$ in figura. Che preimmagine ha?

La funzione è periodica e si vede che $f^{-1}(a, +\infty) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \underline{(k + 2n\pi, \bar{k} + 2n\pi)}$ che non è aperto per $\tau$

$\circledast$ $f_4 : X \to X$

$x \mapsto e^x$




Per qualunque aperto del tipo $(a, +\infty)$ sull'asse delle y la preimmagine è aperta in $(X, \tau)$ perché è del tipo $(b, +\infty) \Rightarrow f_2$ è continua rispetto a $\tau$!

**ES. N° 4** Sia $f: X \to Y$ un'applicazione aperta.
Mostrare che $D \subset Y$ sottoinsieme denso $\Rightarrow$ $f^{-1}(D)$ denso in $X$.

— o —

Vogliamo di mostrarlo per assurdo.
Sia per assurdo $\overline{f^{-1}(D)} \neq X$ : ossia $f^{-1}(D)$ non denso in $X$.
Allora $\exists x \in X$ t.c. $x \notin \overline{f^{-1}(D)}$.
Cosa significa $x \notin \overline{f^{-1}(D)}$? $\exists U_x$ intorno aperto di $x$ t.c. $U \cap f^{-1}(D) = \emptyset$. (stiamo negando la proprietà $x \in \overline{f^{-1}(D)} \Leftrightarrow$ $\forall U_x$ intorno aperto di $x$ si ha $f^{-1}(D) \cap U \neq \emptyset$)

Ma allora $f(U) \cap D = \emptyset$.
Infatti se $\exists \bar{x} \in U$ t.c. $f(\bar{x}) \in D$ (ossia se non vale) avremmo $\bar{x} \in U \cap f^{-1}(D)$ contro l'ipotesi $U \cap f^{-1}(D) = \emptyset$.
$f$ aperta $\Rightarrow$ $f(U)$ aperto in $Y$.
Allora $\exists$ un aperto, $f(U)$, intorno di $f(x) \in Y$ per cui $f(U) \cap D = \emptyset$. Ma ciò è assurdo perché $D$ denso! tutti i punti di $Y$ (quindi anche $f(x)$) appartengono a $\overline{D}$ perciò non può essere che si trovi un intorno aperto, $f(U)$, per cui $f(U) \cap D = \emptyset$.

**ES N° 5** Si considera la seguente famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$

$$\mathcal{T} = \{ Y \subseteq \mathbb{R} : Y \cap \mathbb{N} = \emptyset \} \cup \{ \mathbb{R} \}$$

1. $\mathcal{T}$ è una topologia?
2. È T2? I punti sono chiusi?
3. Calcolare la chiusura di $(0,1]$.

---

(1) Verifichiamo le proprietà di topologia

a. $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{T}$? $\to \mathbb{R}$ per costruzione

$\to \emptyset$ è tale che $\emptyset \cap \mathbb{N} = \emptyset \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{T}$

b. Siano $A, B \in \mathcal{T} \Rightarrow A \subseteq \mathbb{R} : A \cap \mathbb{N} = \emptyset$
$B \subseteq \mathbb{R} : B \cap \mathbb{N} = \emptyset$

$A \cap B \in \mathcal{T}$? Bisogna verificare che $(A \cap B) \cap \emptyset = \emptyset$. Ma

$(A \cap B) \cap \mathbb{N} = A \cap \underbrace{(B \cap \mathbb{N})}_{=\emptyset} = A \cap \emptyset = \emptyset$

c. Siano $A_i \in \mathcal{T}, i \in I \Rightarrow A_i \cap \mathbb{N} = \emptyset$

$\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$? $\left( \bigcup A_i \right) \cap \mathbb{N} = \bigcup_{i \in I} \underbrace{(A_i \cap \mathbb{N})}_{=\emptyset} = \emptyset$

Ok $\mathcal{T}$ è una topologia! Gli aperti sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che NON contengono numeri naturali.

(2) $\mathcal{T}$ è T2?

$\mathcal{T}$ è T2 se $\forall x, y \ \exists U_x, U_y$ intorni aperti di $x$ e $y$ t.c. $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Supponiamo di prendere $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{N}$.

Allora l'unico aperto che mi contiene $y \in \mathbb{N}$ è $\mathbb{R}$. $\Rightarrow$

$\exists x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{N}$ tale che $\forall U_x$ intorno di $x$ e $\forall U_y$ intorno di $y$

$(\text{è } U_y = \mathbb{R}) \Rightarrow U_x \cap \underbrace{U_y}_{\mathbb{R}} \neq \emptyset$ $\Rightarrow \mathbb{R}$ non è T2 rispetto a questa topologia!

* i punti sono chiusi? Si prenda $x \in \mathbb{R}$

$\{x\}$ è chiuso se $\mathbb{R} - \{x\}$ è aperto in $\tau$. Ciò non è vero x costruzione di $\tau$: $\{x\}^c$ sicuramente contiene elementi di $\mathbb{N}$!

Si noti che se $x \in \mathbb{R} - \mathbb{N} \Rightarrow$ per definizione $\{x\} \in \tau$

3_ Calcolare la chiusura di $(0,1]$

Claim $\overline{(0,1]} = [0,1] \cup \mathbb{N}$.

Anzitutto mostriamo che $0 \in \overline{(0,1]}$. Infatti in uno spazio topologico X un pto $x \in X$ appartiene alla chiusura di un sottoinsieme $S \subset X$ se $\forall U_x$ aperto contenente x si ha $U_x \cap S \neq \emptyset$

Ma allora $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha $n \in \overline{(0,1]}$. Infatti $\forall n$ $\forall$ aperto di $\tau$, $U_n$, contenente n si ha $U_n \cap (0,1] \neq \emptyset$.

Infatti gli aperti di $\tau$ contenenti $n \in \mathbb{N}$ sono dati dal solo insieme $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \cap (0,1] \neq \emptyset$.

Altri punti di $\mathbb{R} - \mathbb{N}$ non appartengono a $\overline{(0,1]}$: aperti che li contengono (come osservato prima) possono essere dati dal singoletto $\{x\}$, con $x \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $\{x\} \cap (0,1] = \emptyset$ $\Rightarrow$ $\{x\} \notin \overline{(0,1]}$.