25/5/20

ES N° 1

a. Se S è un sottospazio di X dimostrare che $i: S \to X$ (mappa di inclusione) è continua

b. Dimostrare inoltre che la topologia indotta su S è la più debole (ossia con il minor n° di aperti) tra quelle per cui l'inclusione $S \to X$ è una mappa continua

— o — o —

(a) Per verificare la continuità è necessario prendere un aperto $U \subseteq X$ e controllare che $i^{-1}(U)$ è un aperto in (S, τ_S).
Ma τ_S: topologia indotta ha come aperti insiemi del tipo $A \cap S$, con $A \subseteq X$ aperto per $\tau_X \Leftarrow$ topologia su X
Inoltre per definizione di mappa di inclusione
$$i^{-1}(U) = U \cap S \rightsquigarrow i^{-1}(U) \text{ è aperto in } \tau_S!$$
$\Rightarrow i$ è continua.

(b) supponiamo per assurdo $\exists$ una topologia τ su S tale che $i: (\tau, S) \to X$ è continua ma $\# \tau < \# \tau_S$ (ossia τ è una topologia con un n° più piccolo di aperti rispetto alla topologia indotta τ_S). Allora
$i: (\tau, S) \to X$ è continua $\Rightarrow \forall U \subseteq X$ aperto $i^{-1}(U) \in \tau$
ma $i^{-1}(U) = U \cap S$ perché i mappa di inclusione $\Rightarrow i^{-1}(U) \in \tau_S$
$\Rightarrow$ la condizione $\# \tau < \# \tau_S$ è Assurdo! Ogni topologia che rende continua l'inclusione ha almeno tutti gli aperti di τ_S!

ES N° 2

Sia Y lo spazio quoziente di uno spazio X relativo ad una funzione $f: X \to Y$ e sia A un sottospazio di X.

Denotiamo con $(\mathcal{U}_1, B)$ la topologia su $B = f(A) \subseteq Y$ indotta dalla top. quoziente di Y.

Denotiamo con $(\mathcal{U}_2, B)$ la topologia quoziente su B relativa all'applicazione $f|_A : A \to B$.

a - Dimostrare che $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_2$

b - Dimostrare che $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2$ nel caso in cui A sia un aperto di X e f un'applicazione aperta.

— o —

(a) Per mostrare $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_2$ è necessario verificare che ogni aperto in $\mathcal{U}_1$ è anche un aperto della topologia $\mathcal{U}_2$.

Supponiamo $V \in \mathcal{U}_1 \Rightarrow V = U \cap B$ con $U \subseteq Y$ tale che $f^{-1}(U)$ aperto in X.

Infatti $\mathcal{U}_1$ è per costruzione topologia indotta su B dalla topologia quoziente di Y. Ciò significa che i suoi aperti sono dati dall'intersezione con B di aperti di Y. Per definizione di top. quoziente gli aperti ~~et~~ sono sottoinsiemi $U \subseteq Y$ t.c. $f^{-1}(U)$ aperti in X.

Preso dunque $V = U \cap B$ dobbiamo mostrare $V \in \mathcal{U}_2$.

$V \subseteq B$ è un aperto per la top quoziente su B relativa a f_A se $f|_A^{-1}(V)$ è un aperto in A. Questo quindi implica che $f|_A^{-1}(V)$ deve essere un aperto rispetto alla topologia indotta da X su A. Ma:

$$f|_A^{-1}(V) = f|_A^{-1}(U \cap B) = f^{-1}(U) \cap \underbrace{f^{-1}(B) \cap A}_{= A \ (f^{-1}(B) \supseteq A)} = f^{-1}(U) \cap A$$

$$\Rightarrow f|_A^{-1}(V) = \underbrace{\underbrace{f^{-1}(U)}_{\substack{\text{aperto in} \\ X \text{ per ipotesi}}} \cap A}_{\text{aperto in } A \text{ rispetto alla topologia indotta.}}$$

$\Rightarrow \mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_2$

(b) Avendo dimostrato nel punto precedente $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_2$ per mostrare $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2$ è suff verificare che $\mathcal{U}_2 \subseteq \mathcal{U}_1$ sotto le ipotesi aggiuntive di A aperto in X e f aperta.
Sotto queste ipotesi ci dice che $B \subseteq Y$ è aperto
Ciò implica che gli aperti di B nella top. indotta $\underset{\wedge}{,}$ sono aperti in Y (rispetto alla topologia quoziente)
dalla top. quoziente

Analogamente per A: gli aperti nella top indotta sono aperti in X.
Prendiamo dunque $W \in \mathcal{U}_2$ e mostriamo $W \in \mathcal{U}_1$.

$W \in \mathcal{U}_2$: $\underset{\substack{\shortparallel \\ f(A)}}{W \subseteq B}$ e $\underset{\substack{\shortparallel \\ f^{-1}(W) \cap A}}{f|_A^{-1}(W)}$ aperto in A

$f^{-1}(W) \cap A$ aperto in X $\rightarrow f$ è aperta

$f(f^{-1}(W) \cap A) = W$ aperto in $Y \Rightarrow f^{-1}(W)$ aperto in X.
Ciò è suff x concludere che $W \in \mathcal{U}_1$. Infatti $W = W \cap B$ con W aperto in Y rispetto alla topologia quoziente.

$\boxed{\text{ES. N° 3}}$

Si consideri il seguente spazio topologico
$(X = \mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ con $A \in \mathcal{T} (=) \{(x,y) \in A \Rightarrow (-x, y) \in A\}$

a- Dimostrare che $\mathcal{T}$ è una topologia

b- Sia dato $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$ studiare $\mathcal{T}|_S$

c- Sia dato $\bar{S} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$. è T2?

d- Preso ~~gli~~ l'intervallo $(-1, 2)$ studiarne chiusura e parte interna.

— o —

(a) Mostriamo che τ è una topologia verificando la definizione

1. $\phi, \mathbb{R}^2 \in \tau$

$\phi : \{(x,y) \in \phi \Rightarrow$
dal vuoto ogni implicaz. è vera! $\}$

$\mathbb{R}^2 : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ ok!

2. Siano dati $A_1, A_2 \in \tau \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau$?

Sia $(x,y) \in A_1 \cap A_2 \Rightarrow$

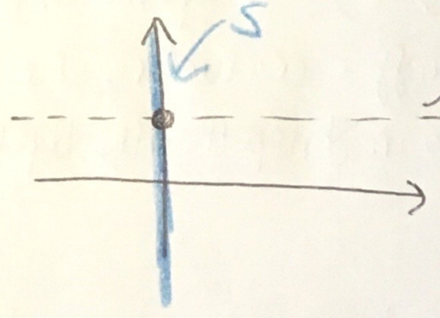
$$\left.\begin{aligned} &* \ (x,y) \in A_1 \Rightarrow (-x,y) \in A_1 \\ &* \ (x,y) \in A_2 \Rightarrow (-x,y) \in A_2 \end{aligned}\right\} (-x,y) \in A_1 \cap A_2$$

3. Siano dati $A_i, i \in I, \in \tau \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$?

Se $(x,y) \in \bigcup_{i \in I} A_i \Rightarrow (x,y) \in A_{\bar{i}}$ per un certo $\bar{i} \in I$.

Ma allora poiché $A_{\bar{i}} \in \tau \Rightarrow (-x,y) \in A_{\bar{i}} \Rightarrow (-x,y) \in \bigcup_{i \in I} A_i$

(b)- Sia $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$



Dalla costruzione si evince che gli aperti di τ sono simmetrici rispetto all'asse delle y. Cosa possiamo concludere su $\tau|_S$?

Claim: $\tau|_S$ è la topologia discreta.

Per definizione gli aperti di $\tau|_S$ sono ~~eta~~ ottenuti come $A \cap S$, con $A \in \tau$.

Dunque se consideriamo una qualsiasi retta r orizzontale

$r = \{(x,y) : y = c\}$

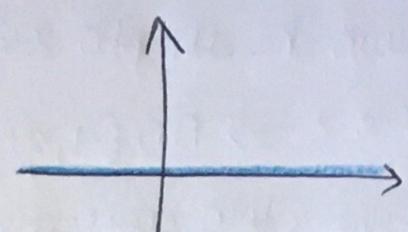
$\Rightarrow r \in \tau$ perché se $(x,y) \in r \Rightarrow (-x,y) \in r$!

Ma allora $\tau|_S$ contiene tutti gli aperti dati da $r \cap S = \{(0,c)\}$

$\Rightarrow$ ogni punto di S è un aperto $\Rightarrow \tau|_S$ è discreta!

(c) Sia dato $\bar{S} = \{(x,y) : y=0\}$

Notiamo che in questo caso la topologia non è più quella discreta!



Per ottenere gli aperti di $\tau|_{\bar{S}}$ infatti intersechiamo sottoinsiemi simmetrici rispetto a $x=0$ con $\bar{S}$ $\Rightarrow$ otteniamo aperti $\bar{A} \in \tau_{\bar{S}}$

$$\bar{A} \text{ t.c. } \{(x,0) \in \bar{A} \Rightarrow (-x,0) \in \bar{A}\}.$$

Rispetto a tale topologia può essere $\bar{S}$ uno spazio T2?

Bisogna verificare che $\forall\, p,q \in \bar{S}$ $\exists$ $\bar{A}_p$ e $\bar{A}_q$ aperti contenenti p e q tali che $\bar{A}_p \cap \bar{A}_q = \emptyset$.

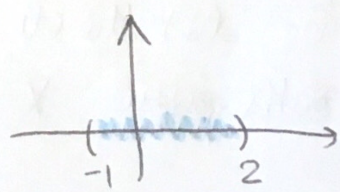
Ma se prendiamo $p=(a,0)$ e $q=(-a,0)$ $\Rightarrow \forall\, \bar{A}_p, \bar{A}_q$ aperti contenenti p e q si ha $\bar{A}_p \cap \bar{A}_q \neq \emptyset$!

Infatti per definizione di $\tau_{\bar{S}}$ se $\underbrace{(a,0)}_{=p} \in \bar{A}_p \Rightarrow \underbrace{(-a,0)}_{=q} \in \bar{A}_p$

$\Rightarrow$ l'intersezione non può essere vuota! (Vale lo stesso tipo di ragionamento per $(-a,0) \in \bar{A}_q$)

$\Rightarrow \bar{S}$ non è T2!

(d) si consideri l'intervallo



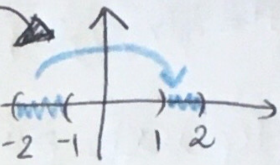
(*) $\mathring{\overbrace{(-1,2)}} = \bigcup_{j \in J} A_j$: è l'unione di tutti gli aperti di $(\mathbb{R}^2, \tau)$ contenuti in $(-1,2)$. Ciò significa che devo considerare tutti i sottoinsiemi di $(-1,2)$ che sono simmetrici rispetto a $(0,0)$

$\Rightarrow \overset{\circ}{(-1,2)} = (-1,1)$: non posso aggiungere altri punti $\in [1,2)$ perché dovrei beccare anche punti in $[-2,-1]$ e questi $\notin (-1,2)$.

(*) $\overline{(-1,2)} = ?$

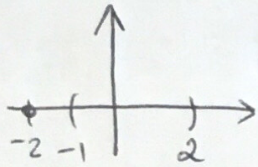
Ricordiamo che un pto $x \in \overline{(-1,2)}$ se e solo se $\forall$ aperto $A \in \tau$ che contiene $x \Rightarrow A \cap (-1,2) \neq \emptyset$

Sicuramente devo aggiungere i punti $(-2,-1]$. Ogni aperto che contiene $(x,0)$ con $x \in (-2,-1]$ contiene, per definizione di τ anche $(-x,0)$, ossia un pto di questo insieme.



$p=(-2,0) \in \overline{(-1,2)}$?

No!



$\exists$ l'aperto $A=\{(-2,0),(2,0)\}$ che contiene $(-2,0)$ e tale che $A \cap (-1,2) = \emptyset$.

$\Rightarrow \overline{(-1,2)} = (-2,2)$ (Si noti che il complementare $(-\infty,-2] \cup [2,+\infty)$ è un aperto di τ effettivamente!)

$\boxed{\text{ES. N° 4}}$

Indichiamo con $(\mathbb{R}_s, \tau_s)$ la retta di Sorgenfrey.

a_ Dimostrare che il sottospazio $X=\{(x,y) \in \mathbb{R}_s \times \mathbb{R}_s : x+y=0\}$ è discreto

b_ Dimostrare che il sottospazio $X=\{(x,y) \in \mathbb{R}_s \times \mathbb{R}_s : x-y=0\}$ è omeo a $(\mathbb{R}_s, \tau_s)$

c_ Considerando una retta r passante per l'origine stabilire quando (in base alla precedente) r è omeomorfa a $(\mathbb{R}_S, \tau_S)$ e quindi

" " " a $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$

— o —

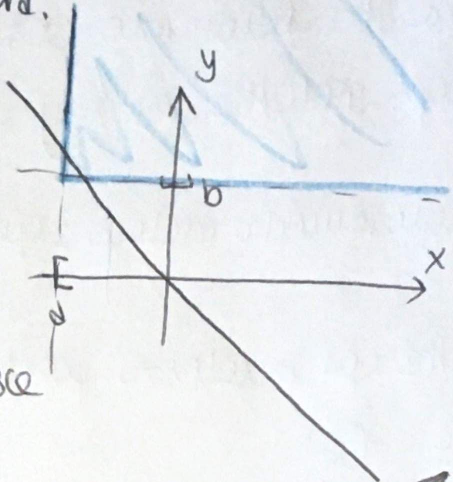
ⓐ Per definizione di topologia prodotto sappiamo di dover considerare aperti della forma $\bigcup U_j \times V_j$ dove $U_j, V_j \in \tau_S$

→ saranno unioni qualsiasi di elementi del tipo $[a,b) \times [c,d)$

Successivamente dovremo intersecare con le rette per ottenere gli aperti della topologia indotta.

Prendiamo aperti della forma $[a, +\infty)$ con $a<0$

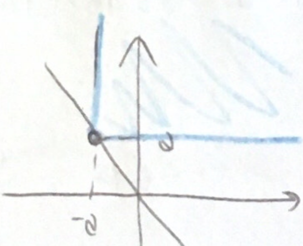
$[b, +\infty)$ con $b>0$



$\Rightarrow [a, +\infty) \times [b, +\infty)$ ci definisce in $\mathbb{R}^2$ l'aperto in figura.

← il nostro sottospazio.

è dunque suff. prendere $[a, +\infty) \times [a, +\infty)$ per mostrare che la top indotta ~~è~~ sulla retta $x+y=0$ è quella discreta. Infatti, come prima, questo è un aperto nella top prodotto. Intersechiamo con r

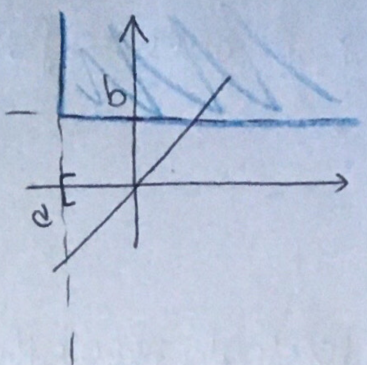


e $r \cap (\underbrace{[-a, +\infty) \times [a, +\infty)}_{=A}) = \{(-a, a)\}$ → i punti della retta sono aperti per costruzione!!

(aperto in $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$)

ⓑ Come prima: prendiamo un aperto qualsiasi nel prodotto, ed intersechiamo con la retta $x-y=0$.

$[a,\infty)\times[b,+\infty) \longrightarrow$ aperto nella top prodotto.

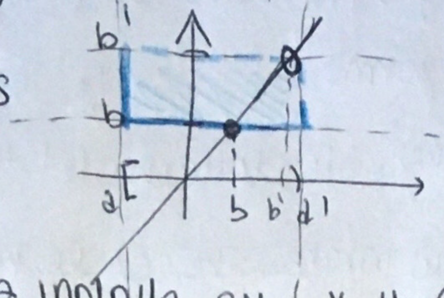


In particolare

$[a,a')\times[b,b')$

è un aperto di $\mathbb{R}_S\times\mathbb{R}_S$

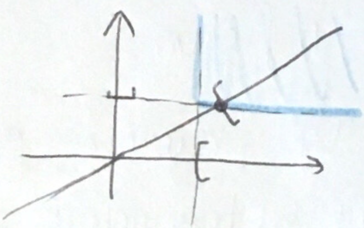
Intersecandola con la retta troviamo un aperto della top indotta su $x-y=0$ della forma $[b,b')$.



Dal momento che sto lavorando con basi di una top. questo mi mostra che la top. indotta su $x-y$ è proprio τ_S.

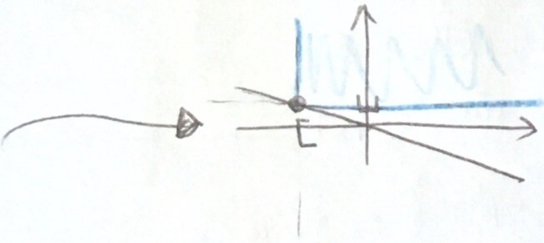
(c) Con un ragionamento analogo a quello fatto fino ad ora si vede che

→ le rette con pendenza positiva ottengono come top indotta τ_S



→ le rette con pendenza negativa hanno topologia indotta $=\mathcal{D}$

il punto è un aperto!



NOTA al punto (b): con quanto detto precedentemente si è mostrato che $x+y$ ha top. indotta pari a τ_S. Costruiamo ora l'omeomorfismo. Si consideri la mappa

$\pi:\mathbb{R}_S\times\mathbb{R}_S\to\mathbb{R}_S$ e la sua restrizione $\pi|_X : X\to\mathbb{R}_S$

$(x,y)\longmapsto x$ $\qquad$ $(x,x)\mapsto x$.

Controlliamo che $\pi|_X$ è omeom:

→ biettività ok!

In modo evidente $(x,x) \longmapsto x$ è iniett e suriett

→ continuità ok: per quanto detto precedentemente sulla top indotta su X

→ mappa inversa continua ok: $\pi_X^{-1}: \mathbb{R}_S \to X$
$x \longmapsto (x,x)$

$\boxed{\text{ES. N° 5}}$

Si mostri che (X, τ) è $T2 \iff \forall x \in X$ si ha $\{x\} = \bigcap_{U_x \in \mathcal{Y}_x} \overline{U_x}$, dove $\mathcal{Y}_x$ è la fam di intorni U_x di x.

Anzitutto notiamo che per costruzione $\{x\} \subseteq \bigcap_{U_x \in \mathcal{Y}_x} \overline{U}_x$ sempre!

Quindi di fatto dobbiamo mostrare che

(X, τ) è $T2 \iff \forall x \in X$ si ha $\bigcap \overline{U}_x \subseteq \{x\}$

Vediamo le due implicazioni:

$\Rightarrow$ (X, τ) è $T2$. Supponiamo per assurdo che $\bigcap \overline{U}_x \not\subseteq \{x\} \Rightarrow$
$\exists y \in X$ t.c. $y \in \bigcap \overline{U}_x$ con $y \neq x$. Ma allora
$\forall U_x \in \mathcal{Y}_x$ si ha $y \in \overline{U}_x$, ossia y appartiene alla chiusura di ogni intorno di x. Per definizione di chiusura ciò implica che $\forall U_y$, intorno di y, si ha $U_x \cap U_y \neq \emptyset$. Ma allora abbiamo negato X $T2$! Assurdo!

$\Leftarrow$ Siano x e y qualsiasi tali che $\{x\} = \bigcap \overline{U}_x$ e $\{y\} = \bigcap \overline{U}_y$ con $x \neq y$. Dobbiamo mostrare che $\exists$ U_x e U_y intorni dei due punti tali che $U_x \cap U_y = \emptyset$.

$\emptyset = \{x\} \cap \{y\} = \left(\bigcap \overline{U}_x\right) \cap \left(\bigcap \overline{U}_y\right) \to \exists\ \overline{U}_x$ e $\overline{U}_y$ t.c. $\overline{U}_x \cap \overline{U}_y = \emptyset$

Ma allora $\overline{U}_x \cap \overline{U}_y \supseteq \overline{(U_x \cap U_y)} \supseteq U_x \cap U_y \Rightarrow U_x \cap U_y = \emptyset$

$\overline{U}_x \cap \overline{U}_y = \emptyset$

$\Rightarrow X \text{ è } T2!$