$\boxed{\text{ES. N°1}}$ Sia dato $(\mathbb{R}, \tau_+)$: gli aperti sono il vuoto, $\mathbb{R}$ e gli intervalli del tipo $(-\infty, a)$, $a \in \mathbb{R}$. Stabilire quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono compatti rispetto a τ_+.

A - $(0,1)$

B - $[0,1)$

C = $(0,+\infty)$

D = $[0,+\infty)$

E = $(-\infty,1)$

F = $(-\infty,1]$

— o —

Ricordiamo che un sottoinsieme S di uno sp. topologico X è compatto se $\forall$ ricoprimento aperto di S $\exists$ un sottoricoprimento finito.

Ciò significa che S NON è compatto se $\exists$ un ricoprimento aperto di S $S \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ t.c. $\forall$ sottoricoprimento finito $S \not\subseteq \bigcup_{i \in \tilde{I}} A_i$ $\quad \tilde{I} \subseteq I$ insieme finito di indici

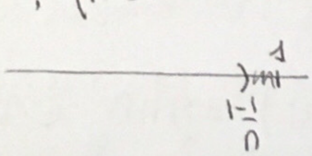
<u>Claim</u>: A, B, C, D, E non sono compatti per τ_+

F sì.

* Supponiamo di considerare il ricoprimento aperto $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-\infty, 1-\frac{1}{n})$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} (0,1) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (-\infty, 1-\frac{1}{n}) \\ [0,1) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (-\infty, 1-\frac{1}{n}) \\ (-\infty,1) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (-\infty, 1-\frac{1}{n}) \end{array}\right\}$$

ci ricopre i sottospazi A, B, E <u>MA</u> non è possibile estrarre un sottoricopr. finito! Qualsiasi ~~sottoricoprimento~~ unione finita di elem $(-\infty, 1-\frac{1}{n})$ non mi ricopre più A, B, E! (Mancherebbe un pezzetto)



* Consideriamo ora la famiglia di aperti $(-\infty, n)$, $n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} (0,+\infty) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (-\infty, n) \\ [0,+\infty) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (-\infty, n) \end{array}\right\}$$

ricopro i sottospazi C e D ma, come prima, non posso estrarre un sottoins finito! Non ricoprirei più completamente C e D.

*Al contrario F è compatto perchè sia dato A_i, $i \in I$ fam di aperti di τ_+ t.c. $F \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$, $A_i = (-\infty, a_i)$

Poichè $1 \in F \Rightarrow \exists$ un certo $\bar{i} \in I$ t.c. $(-\infty, a_{\bar{i}}) \ni 1$. Ma allora è suff prendere il solo aperto $A_{\bar{i}} = (-\infty, a_{\bar{i}})$ come sottoricoprimento finito (è fatto da un solo elemento) di F!

ES. N° 2

Sia X uno sp. topologico e sia $X^\infty = X \cup \{\infty\}$, con ∞ un elem che $\notin X$.
Sia $\mathcal{U}$ la top. su X $\Rightarrow$ definiamo $\mathcal{U}^\infty$ (top su X^∞) come l'insieme degli $V \in \mathcal{U}$ e dei sottoinsiemi della forma $V \cup \{\infty\}$ dove $V \subseteq X$ e $X - V$ è compatto in X e chiuso in X

a. $\mathcal{U}^\infty$ è una top. su X^∞
b. $(X, \mathcal{U})$ è sottosp. di $(X^\infty, \mathcal{U}^\infty)$
c. X^∞ è compatto: (si chiama COMPATTIFICAZIONE di ALEXANDROFF)

— o —

ⓐ- Verifichiamo i 3 assiomi che definiscono una topologia:

1- $\emptyset \in \mathcal{U}^\infty$: $\emptyset \in \mathcal{U}$!
$X^\infty \in \mathcal{U}^\infty$: $X^\infty = X \cup \{\infty\}$ con $X \subseteq X$ e $X - X = \emptyset$ chiuso e compatto in X

2- $\forall A, B \in \mathcal{U}^\infty \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{U}^\infty$. Diverse possibilità

$\rightarrow A \in \mathcal{U}$ e $B \in \mathcal{U}$ $\Rightarrow A \cap B \in \mathcal{U} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{U}^\infty$

$\rightarrow A \in \mathcal{U}$ e $B \subseteq X$ t.c. $X - B$ compatto in X e chiuso $\Rightarrow A \cap (B \cup \{\infty\}) \in \mathcal{U}^\infty$?

$$A \cap (B \cup \{\infty\}) = \underset{\substack{\uparrow \\ \in \mathcal{U} \\ \text{x def}}}{A} \cap \underset{\substack{\uparrow \\ X-B \text{ chiuso in } X \Rightarrow \\ B \text{ aperto in } X \Rightarrow B \in \mathcal{U}}}{B} \in \mathcal{U}$$

$\rightarrow A_1, A_2 \in \mathcal{U}^\infty$ del tipo $A_i = V_i \cup \{\infty\}$ con $X - V_i$ compt e chiuso in X $i=1,2$

$$\Rightarrow A_1 \cap A_2 = \underbrace{(V_1 \cap V_2)}_{\in \mathcal{U}} \cup \{\infty\} \quad \Rightarrow \in \mathcal{U}_\infty!$$

②

$3 \to$ siano $A_i \in \mathcal{U}^\infty \Rightarrow \xrightarrow{1} A_i \in \mathcal{U}$

o

$\xrightarrow{2} A_i = V_i \cup \{\infty\}$ con V_i chiusi e compatti in X

$\Rightarrow \bigcup A_i \in \mathcal{U}^\infty$? supponiamo siano tutti del tipo 2 o comunque che ce ne sia almeno uno del tipo 2

$\bigcup A_i = \bigcup (V_i \cup \{\infty\})$

$= \left(\bigcup V_i\right) \cup \{\infty\}$: $\bigcup V_i \in \mathcal{U}$ perché V_i chiusi in X $\forall i$

$\to$ bisogna solo mostrare che $X - \left(\bigcup V_i\right)$ chiuso e compatto in X

MA $\left(\bigcup V_i\right)^c = \bigcap V_i^c$: intersez. qualsiasi di chiusi è chiusa

inoltre $\underbrace{\bigcap V_i^c}_{\text{chiuso}} \subseteq \underbrace{V_i^c}_{\text{compatto}}$ $\to$ chiuso in compatto è ~~chiuso~~ compatto $\Rightarrow \bigcup A_i \in \mathcal{U}^\infty$ ✓!

(b) $(X, \mathcal{U})$ sottospazio di $(X^\infty, \mathcal{U}^\infty)$: si vuole verificare che la top di X è quella indotta da $\mathcal{U}^\infty$, i.e. $\mathcal{U} = \mathcal{U}^\infty|_X$

$\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}^\infty|_X$: si prenda $U \in \mathcal{U} \Rightarrow U \in \mathcal{U}^\infty$ e $U = U \cap X \Rightarrow U \in \mathcal{U}^\infty|_X$

$\mathcal{U}^\infty|_X \subseteq \mathcal{U}$: un aperto di $\mathcal{U}^\infty|_X$ è del tipo $A \cap X$ con $A \in \mathcal{U}^\infty$.

Allora $\xrightarrow{1} A \subseteq X$ e $A \in \mathcal{U} \Rightarrow A \cap X = A \in \mathcal{U}$ ok

$\xrightarrow{2} A = V \cup \{\infty\}$ con $V \subseteq X$ e $X - V$ chiuso e compt in X

$\Rightarrow A \cap X = (V \cup \{\infty\}) \cap X = V \in \mathcal{U} \Rightarrow$ ok!

(c) X^∞ compatto : sia dato un qualsiasi ricoprimento ~~fin~~

$X^\infty \subseteq \bigcup_I A_i \Rightarrow$ perché $\{\infty\} \in X^\infty$ $\exists\, \bar{i} \in I$ t.c. $A_{\bar{i}} = V_{\bar{i}} \cup \{\infty\}$ con $V_{\bar{i}} \subseteq X$ e $V_{\bar{i}}^c$ chiuso e compatto in X

$X - V_i \subseteq X^\infty \subseteq \bigcup A_i$. Interseco gli aperti A_i con X ed ottengo un ricopr (rispetto a $\mathcal{U}^\infty|_X$) per $X - V_i \Rightarrow$ è compatto $\Rightarrow$ posso estrarre un sottoricopr finito (di indici $i \in \tilde{I}$)

$X - V_i \subseteq \bigcup_{i \in \tilde{I}} (A_i \cap X)$

Ma allora $\bigcup_{i \in \tilde{I}} (A_i \cap X) \cup A_{\tilde{i}}$ mi ricopre $X^\infty \Rightarrow$ da ogni ricoprimento

ho estratto un sottoricopr finito $\Rightarrow X^\infty$ è compatto!

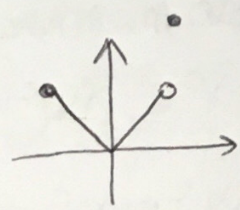
$\boxed{\text{ES N° 3}}$ Si consideri lo spazio $X = [0,1] \cup \{2\}$ con top. data da

aperti euclidei su $[0,1]$ e $(a,1) \cup \{2\}$ con $a \in [0,1)$

Si consideri poi la mappa $\quad$ questa top.

$$f : [-1,1] \to (X, \tau)$$

$$x \longmapsto \begin{cases} |x| & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$$



a - f è continua rispetto alla scelta su X di

1 → top banale

2 → top cofinita

3 → top euclidea

4 → top discreta.

b - X è T2?

c - X è compatto?

———o———

$A \in \tau$

a - Per discutere la continuità dimostriamo che $f^{-1}(A)$ è aperto (o non può esserlo) in $[-1,1]$ con le varie scelte di top.

1 - NON CONTINUA: $f^{-1}[0, \frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ che non è aperto in X rispetto alla top. banale (ha come aperti solo $\emptyset$ e $[-1,1]$

2 - NON CONTINUA: $f^{-1}[0, \frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ non è aperto in X rispetto alla top dei complementari finiti

3 - Verifichiamo direttamente che f^{-1}(aperti euclidei di $[0,1]$) è aperto in $[-1,1]$. Infatti abbiamo

$$f^{-1}[0,a) = (-a,a) \quad 0<a<1$$

$$f^{-1}(a,1] = [-1,-a) \cup (a,1)$$

} aperti in $[-1,1]$ con top indotta da $\mathbb{R}$

Controlliamo ora l'altra tipologia di aperti: $(a,1)\cup\{2\}$

$f^{-1}\big((a,1)\cup\{2\}\big) = (-1,-a)\cup(a,1)\cup\{1\} = (-1,-a)\cup(a,1]$ che è

un aperto in $[-1,1]$ con top indotta! $\Rightarrow f$ è CONTINUA

4- CONTINUA: banalmente perché ogni sottoinsieme di $[-1,1]$ con top discreta è un aperto.

(b) X è T2? X è T2 se $\forall x,y\in X$ $\exists U_x, U_y$ aperti contenenti x e y tc $U_x\cap U_y=\phi$.

Se prendiamo $x=1$ e $y=2$ $\Rightarrow$ ogni aperto di X contenente 1 è del tipo $(a_1,1]$ (abbiamo bisogno di intersecare $[0,1]$ con aperti euclidei di $\mathbb{R}$) e ogni aperto di X contenente 2 è del tipo $(a_2,1)\cup\{2\}$. $(a_1,1]\cap\big((a_2,1)\cup\{2\}\big)\neq\phi$ sempre!

X NON è T2.

(c) X è COMPATTO? Bisogna verificare che $\forall$ ricoprimento aperto di X $\exists$ un sottoricoprimento finito.

Supponiamo $X=[0,1]\cup\{2\}\subseteq\bigcup_{i\in I} A_i$.

Poiché $\{2\}\in X \Rightarrow \exists\, \overline{i}\in I$ tc. $A_{\overline{i}} = (a,1)\cup\{2\}$.

Manca da ricoprire $[0,a]\cup\{1\}$. Sull'intervallo $[0,1]$ stiamo lavorando con la top. indotta da quella euclidea. Rispetto a tale top $[0,a]\cup\{1\}$ è chiuso e limitato $\Rightarrow$ è compatto $\Rightarrow$

$[0,a]\cup\{1\}\subseteq\bigcup A_i$ estraiamo un sottoricopr. finito $A_i, i\in\tilde{I}$ $\Rightarrow$

$\bigcup_{i\in\tilde{I}} A_i\cup A_{\overline{i}} \supseteq X \Rightarrow$ X COMPATTO.

<u>OSS</u>: Avremmo anche potuto utilizzare la continuità della mappa f rispetto a top euclidea. Poiché f è continua e $[-1,1]$ è compatto $\Rightarrow f([-1,1])=X$ è compatto.

ES. N° 4 Sia $X = \mathbb{Z}$ e si consideri la topologia in cui gli aperti sono le semirette $U_n = \{x \in \mathbb{Z} : x > n, n \in \mathbb{Z}\}$.

1_ X è connesso?

2_ X è compatto?

3_ X è connesso per archi?

4_ Sia data su X la relazione $x \sim y \iff x^2 = y^2$. $Y = X/\sim \Rightarrow Y$ è compatto?

— o —

1\. X è connesso $\iff$ non è unione di due aperti disgiunti e non vuoti. Questo è banalmente verificato poiché $\nexists$ aperti disgiunti!

2_ X è compatto? Deve succedere che $\forall$ ricoprimento aperto $\exists$ un sottoricoprimento finito.

Supponiamo di prendere $X \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_{-n}$: ricopro X ma non riesco

ad estrarre un sottoricoprimento finito!

$\Rightarrow$ X non è compatto!

3_ X è connesso per archi se $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ $\exists$ $\alpha : [0,1] \to \underset{X}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{Z}}}$ continua.

$$\text{t.c.} \quad \alpha(0) = z_1 \text{ e} \quad \alpha(1) = z_2$$

supponiamo $z_1 < z_2$

Allora se definiamo $\alpha(t) = \begin{cases} z_1 & t \in [0, 1/2] \\ z_2 & t \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$

abbiamo
$$\left.\begin{aligned} \alpha^{-1}(U_n) &= \emptyset \text{ se } n > z_2 \\ \alpha^{-1}(U_n) &= (\tfrac{1}{2}, 1] \text{ se } n \in (z_1, z_2] \\ \alpha^{-1}(U_n) &= [0,1] \text{ se } n \in (-\infty, z_1] \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \text{preimmagini di} \\ \text{aperti sono aperti} \\ \Rightarrow \alpha \text{ è continua.} \end{array}$$

4\- $Y = X/\sim$ è $\mathbb{Z}$ dove identifichiamo x e $-x$ $\Rightarrow Y = [0, +\infty) \cap \mathbb{Z}$.

La top quoziente è banale! Gli unici sottoinsiemi di Y che hanno come preimmagine un aperto sono Y e $\emptyset$. $\Rightarrow$ Y è compatto (e connesso)

SUGLI SPAZI PROIETTIVI e i LORO SOTTOSPAZI

Lo studio della mappa $\pi: \mathbb{R}^{n+1}-\{0\} \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ (analogo nel caso $\mathbb{K}=\mathbb{C}$) ci permette di verificare che la costruzione fatta su $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ corrisponde allo studio della top. quoziente indotta da π.

π garantisce a $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ di essere:
- $\to$ T2
- $\to$ compatto
- $\to$ connesso.

Diamo ora un'occhiata ai sottospazi proiettivi.
Prima pensiamo ai <u>sottospazi affini</u> di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$: sappiamo che essi sono descritti da un'equazione del tipo $a_0x^d + a_1x^{d-1}y + \dots + a_{d-1}xy^{d-1} + a_dy^d = 0$.
Ciò significa che se consideriamo

$$f: \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$$
$$(x,y) \longmapsto a_0x^d + \dots + a_dy^d$$

rispetto alla top. standard di $\mathbb{R}^2$ il punto $\{0\} \subseteq \mathbb{R}^1$ è chiuso $\Rightarrow$
f è continua (è polinomiale) $\Rightarrow f^{-1}(0)$ è preimmagine di un chiuso rispetto ad una funz continua $\Rightarrow$ È CHIUSO!
Così abbiamo dimostrato che i sottospazi affini sono chiusi.
Nel caso <u>proiettivo</u> dobbiamo solo ricordarci che entra in gioco la proiezione π.
Supponiamo di considerare il caso in cui f definisca una retta in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$

$r = \{[x_0:x_1:x_2] \in \mathbb{P}^2 : a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0\}$ Allora abbiamo

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3-\{0\} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"] & \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \arrow[dl, "\tilde{f}"] \\ \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

$\tilde{f} \circ \pi = f$ e $\tilde{f}\circ\pi$ continua $\Leftrightarrow$ ~~f cont.~~ $\Leftrightarrow \tilde{f}$ cont.

Sia $\tilde{r} = \{(x_0,x_1,x_2) \in \mathbb{R}^3-\{0\} : a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0\}$. Se definisco

$$f: \mathbb{R}^3-\{0\} \to \mathbb{R}$$
$$(x_0,x_1,x_2) \longmapsto a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2$$

f continua e $\tilde{r} = f^{-1}(0)$ (preimmagine di un chiuso tramite funz. continua) è chiuso in $\mathbb{R}^3 - \{0\}$.

Inoltre è saturo rispetto a π : $\tilde{r} = \pi^{-1}(\pi(\tilde{r}))$.

Se non lo fosse (ossia se $\tilde{r} \subsetneq \pi^{-1}(\pi(\tilde{r}))$) significherebbe che $\exists x \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$ t.c. $x \in \pi^{-1}(\pi(\tilde{r}))$ e $x \notin \tilde{r}$.

$$\Updownarrow$$

$$\pi(x) \in \pi(\tilde{r}) \quad e \quad x \notin \tilde{r}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\tilde{f}\pi(x) = f(x) = 0 \qquad f(x) \neq 0 \qquad \Rightarrow \tilde{r} \text{ è saturo}$$

$r = \pi(\tilde{r})$ è un chiuso in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$

Inoltre poiché $r = \mathbb{P}(\tilde{r}) = \underbrace{\mathbb{P}(\underbrace{\{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 : a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0\}}_{\text{è sottosp di dim 2 in } \mathbb{R}^3 - \{0\}})}_{\text{quando proiettivizzo ottengo}}$

$$r \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$$

Semplicemente aumentando il numero di equazioni si ottiene che i sottosp. affini di A^n_k e proiettivi di $\mathbb{P}^n_k$ sono chiusi (sto considerando punti che soddisfano più equazioni - in numero finito - ossia punti che appartengono all'intersezione - finita - di chiusi).

Come prima si ottiene l'omeomorf di un sottosp. k-dim di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ (descritto da n-k equazioni) con $\mathbb{P}^k_{\mathbb{R}}$ (n-k equazioni definiscono un sottospazio affine di dim n-k+1 in $A^{n+1}_{\mathbb{R}}$, proiettivizzando calo di uno la dimensione).

SULLA CLASSIFICAZIONE "TOPOLOGICA" delle CONICHE

Il teorema di classificazione delle coniche affini garantisce che ogni conica di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ è affinemente equivalente a

$x^2+y^2-1=0$ conica a centro

$x^2+y^2=0$ " " degenere

$y^2-x=0$ parabola

$y^2-1=0$ parabola degenere

$y^2=0$ conica doppiamente degenere.

Questo, di fatto, conclude la classificazione topologica: ogni conica di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ è omeomorfa ad una della lista qui sopra.
Le affinità, infatti, sono applicazioni lineari e biunivoche con inversa un'affinità (quindi mappe continue) $\Rightarrow$ le affinità inducono omeom. tra sottospazi (nel nostro caso coniche) di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$.

Possono dunque essere

→ compatte ($\Leftrightarrow$ chiuse e limitate -Heine/Borel-)

$x^2+y^2-1=0$

$y^2=0$

- non compatte

$(x^2+y^2)=(x-iy)(x+iy)$

$x=y^2$

$y^2-1=(y-1)(y+1)$

→ connesse (sono connesse per archi)

$x^2+y^2-1=0$

$x^2+y^2=0$

$y^2=x$

$y^2=0$

- non connesse

$y^2-1=0$.

Nel caso proiettivo invece il teor di classificazione ci garantisce che ogni conica di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ è proiettivam equivalente a

C_1 $x_0^2+x_1^2+x_2^2=0$ conica non deg

C_2 $x_0^2+x_1^2=0$ conica semplicem deg

C_3 $x_0^2=0$ conica doppiam deg.

Dal punto di vista topologico possiamo dimostrare che

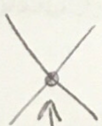
$C_1 \cong C_3 \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ mentre C_2 non è omeom alle altre 2.

C_2: unione di due rette

C_2 non può essere omeom a $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$! Trucco del "togliere un pto":

$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}-\{p\} \approx \underbrace{S^2-\{p\}}_{\text{è connesso per archi}}$ $\Rightarrow$ è connesso

non possono essere omeom!



se tolgo questo punto

$C_2-\{p\}$ non è connesso

Ciò ci permette di osservare che le coniche ~~sono~~ di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ sono connesse (sono connesse per archi) e compatte (sono chiusi in compatti.)

Se ricordiamo che C_1 è proiettivamente equivalente a $\mathscr{C}_4: x_0^2-x_1x_2=0$ costruiamo facilmente l'omeom $C_1 \sim \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$:

$\varphi: \mathscr{C}_4-\{[0:0:1]\} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$

$[x_0:x_1:x_2] \longmapsto [x_0:x_1]$

togliamo $[0:0:1]$ perché ci darebbe problemi

e osservando che su $\mathscr{C}_4 \cap U_0$ $\varphi[x_0:x_1:x_2]=[x_0:x_1]=[x_0^2:x_1x_0]$ (considero un altro rappresentante)

$=[x_1x_2:x_1x_0]=[x_2:x_0]$

uso l'equazione di C_4

riusciamo a definire una mappa su tutto $\mathscr{C}_4$

$\tilde{\varphi}: \mathcal{C}_4 \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$

$$[x_0:x_1:x_2] \longmapsto \begin{cases} [x_0:x_1] & \text{se } [x_0:x_1:x_2] \neq [0:0:1] \\ [x_0:x_2] & \text{se } [x_0:x_1:x_2] = [0:0:1] \end{cases}$$

$\tilde{\varphi}$ è continua e biunivoca (è la proiezione!)

$\mathcal{C}_4$ è chiuso in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ (che è compatto) $\Rightarrow$ è compatto

$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ è T2

$\Big\}$ $\tilde{\varphi}$ è omeom!

ES N° 5 (Prova 27/9/2017)

Si consideri $\mathbb{R}^2$ con top euclidea. Si consideri il sottospazio

$$C_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + ny^2 + 2x = 0\}.$$

Poniamo $A_n = \mathbb{R}^2 - C_n \quad C = \bigcup C_n \quad A = \mathbb{R}^2 - C$.

Si risponda alle domande dopo aver descritto $C_n, n \in \mathbb{Z}$

$$C_n \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & n \end{bmatrix}$$

studiamo il rango della matrice:

$$\det \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & n \end{vmatrix} = -n$$

$\Rightarrow$ se $n=0$ $\operatorname{rk} A_n = 2$ $\Rightarrow$ è l'unione di due rette $x=0$ e $x=-2$

$\Rightarrow$ se $n \neq 0$ $\operatorname{rk} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{vmatrix} = 2$ e $\det \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{vmatrix} = n$

$\nearrow n>0$: C_n è un'ellisse

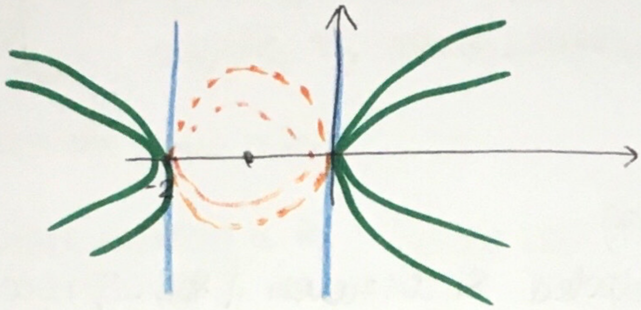
$\searrow n<0$: C_n è un'iperbole

In particolare, completando il quadrato vediamo

$C_n: \ x^2+2x+1 \ +ny^2 -1=0 \quad \Rightarrow$

$(x+1)^2+ny^2=1 \quad \Rightarrow (x-(-1))^2 + \dfrac{y^2}{\frac{1}{n}} = 1$

$\Rightarrow$ possiamo descrivere graficamente le nostre coniche



$C_0: x(x+2)=0$

$C_n: n>0$ ellissi che si schiacciano sempre di più sull'asse x.

$C_n: n<0$ iperbole che si schiaccia.

Domande:

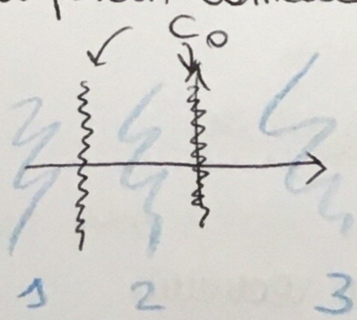
1. Per quali valori di n C_n è chiuso?
Consideriamo la mappa $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x,y) \mapsto x^2+ny^2+2x$

$\Rightarrow C_n = f^{-1}(0)$: preimmagine di un chiuso tramite app continua
$\Rightarrow C_n$ chiuso $\forall n$

2. Per quali valori di n C_n è compatto?
Siamo in $\mathbb{R}^2$ quindi possiamo applicare Heine-Borel e concludere che C_n compatto $\Leftrightarrow$ chiuso e limitato.
Ciò significa che C_n è compatto $\Leftrightarrow$ C_n è limitato $\Leftrightarrow n>0$

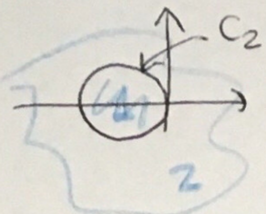
3. Per quali valori di n C_n è connesso?
Per $n>0$ C_n è connesso perché è connesso per archi!

4. Quante sono le componenti connesse di $A_0 = \mathbb{R}^2 - C_0$?
Sono 3!

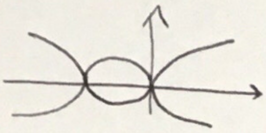


5. Quante sono le componenti connesse di A_2? Sono 2!

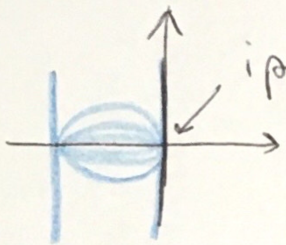
$A_2 = \mathbb{R}^2 - C_2$



6. $C_3 \cup C_{-3}$ è connesso? Sì! È connesso per archi



7. $C = \bigcup_{n \geq 0} C_n$ è connesso? Sì, è connesso per archi



i punti $(-2,0)$ e $(0,0) \in C_n \ \forall n \geq 0$
quindi riesco a costruire l'arco!

8. Sia $A = \mathbb{R}^2 - C$. A denso in $\mathbb{R}^2$?
Devo mostrare che $\bar{A} = \mathbb{R}^2$ quindi che ogni punto $x \in C$ è tale che $x \in \bar{A}$ ossia $\forall U_x$ intorno di x si ha che $U_x \cap A \neq \emptyset$.
Ma gli intorni di x sono palle aperte e se centriamo una palla aperta in un pto $x \in C$ sicuramente intersechiamo $\mathbb{R}^2 - C$. (banalmente lo si vede dal grafico sopra!)