

Facciamo il seguente esercizio in generale: (un po' tecnico)

Sia f una isometria di $\mathbb{E}^n$ che fissa un iperpiano H allora f può essere $\text{Id}_{\mathbb{E}^n}$ (e solo se $\text{Fix}(f) = \mathbb{E}^n$ e solo se f è diretta) oppure $f = \rho_H$ (e solo se $\text{Fix}(f) = H$ e solo se f è inversa) (dove ρ_H = riflessione rispetto ad H)

Dimostrazione: Se f ha luogo fisso che contiene strettamente H , allora necessariamente $\text{Fix}(f) = \mathbb{E}^n$ e f è l'identità.

Sia ora $\text{Fix}(f) = H$, vogliamo vedere che $f = \rho_H$.

Questo completa la dimostrazione. $\text{Fix}(f) = \{p \text{ tali che } f(p) = p\}$.

Dunque, detto T l'operatore unitario associato ad f sappiamo che T ha un autospazio di dimensione $n-1$ (la giacitura di H) associata all'autovalore 1 . Quindi di T sappiamo che è unitario e che ha 1 come autovalore con molteplicità geometrica $n-1$. Allora necessariamente T ha -1 come altro autovalore con molteplicità algebrica e geometrica uguale a 1 !

(Ricordate che gli operatori unitari possono avere solo 1 e -1 come autovalori reali

(metto sotto la verifica)

ma possono anche non avere autovalori reali, come per esempio succede per una rotazione in $\mathbb{E}^2$ di un angolo $\neq \pi, 0$). Infatti, il polinomio caratteristico di T è per forza

$$p_T(x) = (x-1)^{n-1} l(x), \text{ dove } l(x) \text{ è lineare}$$

e lo quindi per fare radice reale, che è -1 per quanto osservato prima.

Ora affermiamo che:

- ① l'autospazio associato a -1 V_{-1} è ortogonale all'altro autospazio V_1 .

Chiaramente questo ci fa suonare una campanella: si potrà usare il teorema spettrale? Vedremo di sì, poiché la matrice associata a T risulta essere in questo caso simmetrica (ortogonale e simmetrica)

Verifichiamo ora che se vale ①, allora necessariamente f è la riflessione rispetto ad H .

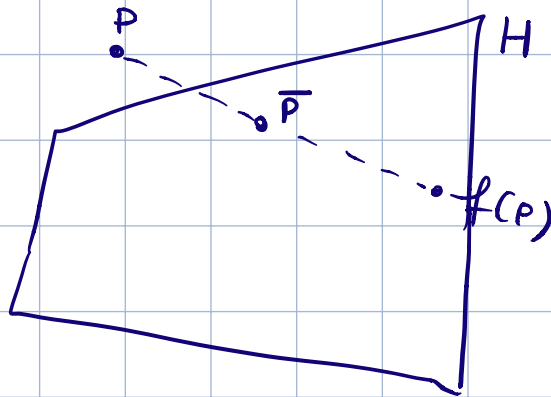
Prendiamo $\bar{P}$ = proiezione ortogonale di P su H

so che $\overrightarrow{\bar{P}P} \in V_{-1}$, quindi $T(\overrightarrow{\bar{P}P}) = -\overrightarrow{\bar{P}P}$

D'altra parte

$$\begin{aligned} T(\overrightarrow{\bar{P}P}) &= \overrightarrow{f(\bar{P})f(P)} = \\ &= \overrightarrow{\bar{P}f(P)} \end{aligned}$$

Dunque $\overrightarrow{\bar{P}f(P)}$ è l'opposto di $\overrightarrow{\bar{P}P}$ come volevamo.



Ora dimostriamo che necessariamente $f^2 = \text{Id}_{\mathbb{E}^n}$

Osserviamo che necessariamente

$$H = \text{Fix}(f) \subseteq \text{Fix}(f^2)$$

$$(\forall p \in \mathbb{E}^n \quad f^2(p) = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{def}}}{f}(f(p)) = \underset{\substack{\downarrow \\ p \in \text{Fix}(f)}}{f}(p) = \underset{\substack{\downarrow \\ p \in \text{Fix}(f)}}{p})$$

D'altra parte esiste almeno un punto $Q \notin \text{Fix}(f)$ che appartiene a $\text{Fix}(f^2)$: prendo v autovettore associato all'autovalore 1 ($v \in V_1 \setminus \{0_v\}$)

e considero $P \in H$ qualunque e prendo

$$Q \text{ tale che } \overrightarrow{PQ} = v$$

$Q \notin H$ perché $v \notin V_{-1} = \text{gratua di } H$
cosa fa f su Q ?

$$\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \overrightarrow{P f(Q)} \\ \parallel \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \text{p.e. Fix}(f)$$

$$T(\overrightarrow{PQ})$$

$$\parallel \rightarrow \quad \overrightarrow{PQ} \in V_{-1}$$

$$= -\overrightarrow{PQ}$$

Allora se prendo $f^2(Q)$ ottengo

$$\overrightarrow{P f^2(Q)} = \overrightarrow{f^2(P) f^2(Q)} = T^2(\overrightarrow{PQ}) = \\ = T(T(\overrightarrow{PQ})) = T(-\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{PQ}$$

Allora $Q \in \text{Fix}(f^2)$ come volevamo!

Ma se f^2 ha nel suo luogo fisso un iperpiano
e un punto esterno $\Rightarrow \text{Fix}(f^2) = \mathbb{E}^n \Rightarrow f^2 = \text{Id}_{\mathbb{E}^n}$
OK

Ora dimostriamo che V_1 e V_{-1} sono ortogonali.

Sia M la matrice associata a T fissando un sistema di riferimento cartesiano.

- Siccome T è unitario M è ortogonale:

$$M^{-1} = M^T$$

- Siccome $f^2 = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$ allora necessariamente

$$M^2 = I_n$$

Mettendo insieme queste due informazioni abbiamo che

$$M = M^{-1} = M^T$$

Quindi in particolare M è simmetrica, e applicando il teorema spettrale abbiamo che i suoi due autospazi sono ortogonali:

$V_{-1} \perp V_1$, come volevamo.

Verifichiamo ora che gli autovalori reali di un operatore unitario sono necessariamente ± 1

Sia $T: V \rightarrow V$ operatore unitario,

Sia λ autovalore reale di T : $\exists v \neq 0_v$ tale che $T(v) = \lambda v$.

Considero $\langle v, v \rangle \neq 0$ $\xrightarrow{T \text{ unitario}}$ $\langle T(v), T(v) \rangle \xrightarrow{\text{linearit\`e prodotto scalare}}$ $\langle \lambda v, \lambda v \rangle = \lambda^2 \langle v, v \rangle$

Quindi $\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$.

Osservazione finale: ci si potrebbe chiedere se è vero che: data $f \in \text{Isom}(IE)$ è un'isometria inversa tale che $f \circ f = f^2 = \text{Id}_E$, allora f è una riflessione?

Sicuramente è vera questa affermazione:

Se $f^2 = \text{Id}_E$ allora l'operatore associato T è diagonalizzabile, e ha lo spettro contenuto in $\{\pm 1\}$.

Questo fatto si vede particolarmente bene usando il polinomio minimo dell'operatore.

Tuttavia l'affermazione iniziale è falsa: basta prendere in IE^3 la isometria associata a $-I_3$: la simmetria rispetto all'origine. È una isometria inversa che ha come luogo fisso $\{0\}$, quindi non è una riflessione, ma ovviamente $-I_3 \cdot -I_3 = I_3$.