

$IP_{\mathbb{R}}^n$  e  $IP_{\mathbb{C}}^n$  sono spazi topologici con la topologia quoziente indotta da quella euclidea su  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  e  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ .

Vediamo alcune proprietà di queste topologie: (qui vale  $\mathbb{R}$  ma vale per  $\mathbb{C}$ )

Sia  $\pi: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow IP_{\mathbb{R}}^n$  la mappa quoziente.

Ricordiamo che  $\{\text{aperti di } IP_{\mathbb{R}}^n\} = \left\{ \text{imma giun. di aperti saturi di } \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \text{ rispetto a } \pi \right\}$

- Sia  $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  aperto. Allora  $\pi^{-1}(\pi(U))$  è un aperto per  $T_0$ .

Quindi  $\pi$  è un'identificazione aperta.

- la carta affine  $U_0 \subseteq IP_{\mathbb{R}}^n$  con questa topologia è aperta: infatti  $U_0 = \pi(\underbrace{\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0 \neq 0\}}_{\text{aperto saturo risp. a } \pi})$ .

- la mappa del cambiamento di coordinate da

proiettiva ad affini  $\varphi: U_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$  è un omeomorfismo.

Infatti abbiamo che  $\varphi$  è indotta da

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \mathbb{R}^{n+1} \\ \pi \downarrow & \nearrow \varphi & \\ U & & \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \tilde{\varphi}: \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ (x_0, \dots, x_n) \mapsto \left( \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right) \\ \text{per passaggio al quoziente.} \end{array} \right.$$

Per la proprietà universale delle topologie quoziente,

$\tilde{\varphi}$  continua  $(\Rightarrow) \varphi$  continua. Inoltre  $\varphi$  ha inversa continua (le solite  $T_0$ ).

- I sottospazi proiettivi sono chiusi (stessa dimostrazione)
- le curve piane sono chiuse e se parto da una curva affine  $C_0$  in  $U_0$ , la sua chiusura proiettiva ha come supporto  $\overline{|C_0|} \subseteq IP_{\mathbb{R}}^2$ , la chiusura del supporto di  $C_0$  in  $IP_{\mathbb{R}}^2$ .

- $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$  e  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$  sono spazi di Hausdorff: Siano  $p, q$  punti distinti in  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ . Se per qualche  $i$  appartengono a una stessa corte affine  $p, q \in U_i \simeq \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{R}^n$  è  $T\mathbb{C}$  e posso separarli con due aperti.

Altrimenti, posso sempre prendere un iperpiano  $H$  tale che  $p, q \notin H$ , e quindi  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n \setminus H$  è omeomorfo ad  $\mathbb{R}^n$  e faccio lo stesso ragionamento. Stesso ragionamento per  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ .

Poiché  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  è sempre connesso (è connesso per archi), abbiamo che  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$  e  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$  sono spazi connessi.

Esercizio: verificate che le proiettività di

$\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n \circ \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$  sono degli omeomorfismi

(ovviamente non tutti gli omeomorfismi sono proiettività! Fate un esempio!)

Osservazione importante: Considero il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} S^m & \xrightarrow{i} & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \\ & \searrow p & \downarrow \pi \\ & & \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^m \end{array}$$

$$p: S^m \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^m \quad p = \pi \circ i \quad \text{dove } i: S^m \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \text{ è l'inclusione}$$

Vale che:  $p$  è una identificazione chiusa.

Infatti: -  $p$  è continua perché composizione di continue;  
 -  $p$  è chiusa perché è appl. continua da un compatto a un T2.

Quindi posso vedere

$\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^m$  come quoziente di  $S^m$

$p(\underline{x}) = p(\underline{y})$  se e solo se  $\underline{x} = \underline{y}$  oppure  $\underline{x} = -\underline{y}$

Su  $S^m$  sto identificando i punti antipodali.

Per gli spazi complessi, usando che  $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^2$ , abbiamo

$$S^{2m+1} \subseteq \mathbb{R}^{2m+2} \setminus \{0\} \quad \text{e abbiamo} \quad S^{2m+1} \xrightarrow{p} \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^m$$

$$\mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}$$

Siccome abbiamo  $p: S^m \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^m$  e  $p: S^{2m+1} \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^m$

applicazioni continue, poiché le sfere sono compatte,  
 gli spazi proiettivi reali e complessi lo sono.

Per la stessa ragione,  $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$  e  $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$  sono connessi per archi,  
poiché quozienti di connetti per archi.

Quindi in particolare sono connessi.

ESERCIZIO: dimostrate che sono localmente connetti per archi,  
ovvero ogni punto possiede un sistema fondamentale di  
intorni connetti per archi.

Riassumendo:

Gli spazi proiettivi reali e complessi sono  
spazi topologici connessi, compatti e di Hausdorff



Alcuni modelli per spazi proiettivi di dimensione bassa:

1)  $\boxed{\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \sim S^1}$

2)  $\boxed{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \sim S^2}$

3)  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  come figura piana con bordi identificati.

1) Sappiamo da quanto visto prima che  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \sim \frac{S^1}{\sim}$  dove  
 $\underline{x} \sim \underline{y}$  se  $\underline{x} = \underline{y}$  o  $\underline{x} = -\underline{y}$ .

Ora basta vedere che  $\frac{S^1}{\sim} \sim S^1$ .

Prendo l'applicazione  $f: S^1 \rightarrow S^1$   
 $\downarrow$   
 $(\cos t, \sin t) \mapsto (\cos 2t, \sin 2t)$

Se lo vedo nei complessi è  $f: S^1 \rightarrow S^1$   $f(z) = z^2$  ovvero  
 $\uparrow$   $\uparrow$   
 $\mathbb{C}$   $\mathbb{C}$   $f(e^{it}) = e^{i2t}$

$f$  è aperta (stessa dimostrazione della mappa esponenziale)

e continua.  $\Rightarrow f$  è una identificazione, e ha le stesse fibre

di  $\pi: S^1 \rightarrow \frac{S^1}{\sim}$ , allora, per la proprietà universale

degli spazi quozienti, gli spazi quozienti coincidono a meno di  
omeomorfismo:  $\frac{S^1}{\sim} \sim S^1$

Un omeomorfismo esplicito tra  $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$  ed  $S^1$  lo possiamo ottenere con:

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \cong S^1$$

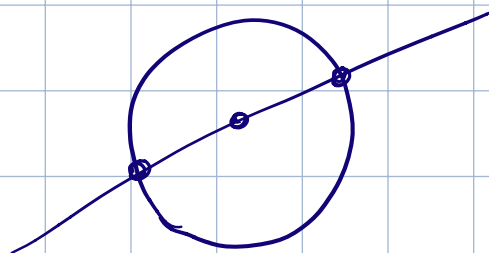
Dato  $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \ni [x_0, x_1]$

open  $(x_0, x_1)$  in  $\mathbb{R}^2$  interseca  $S^1$  in 2 punti antipodali:

che sono:

$$\left( \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + x_1^2}}, \frac{x_1}{\sqrt{x_0^2 + x_1^2}} \right) \text{ e }$$

$$\left( \frac{-x_0}{\sqrt{x_0^2 + x_1^2}}, \frac{-x_1}{\sqrt{x_0^2 + x_1^2}} \right).$$



Orò voglio applicare la applicazione  $f$  sopra descritte per identificarli:

$$\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + x_1^2}} = \cos t \quad \frac{x_1}{\sqrt{x_0^2 + x_1^2}} = \sin t$$

voglio prendere  $(\cos t, \sin t) \in S^1$

Per le formule di duplicazione degli archi:

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t \quad \text{mentre} \quad \sin 2t = 2 \cos t \sin t.$$

allora

$$f \left( \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + x_1^2}}, \frac{x_1}{\sqrt{x_0^2 + x_1^2}} \right) = \left( \frac{x_0^2 - x_1^2}{x_0^2 + x_1^2}, \frac{2x_0 x_1}{x_0^2 + x_1^2} \right).$$

2)  $IP_{\mathbb{C}}^1 \sim S^2$ . Se vedo  $IP_{\mathbb{C}}^1$  come quoziente di una sfera nel modo indicato prima, ho  $S^3 \subseteq \mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ , e il quoziente non è l'identificazione dei punti antipodali (anzi: quali sono le fibre?).

Possiamo però costruire direttamente un omeomorfismo con  $S^2$  in questo modo:

Osserviamo intanto che  $IP_{\mathbb{C}}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

dove  $\mathbb{C} = \mathbb{C} \cup 0$  e  $\infty$  = il punto all'infinito  $[0, 1]$

Quindi abbiamo  $\mathbb{R}^2$  unito un punto all'infinito.

Anche  $S^2$  lo possiamo far corrispondere a  $\mathbb{R}^2 \cup$  un punto, lo facciamo quando prendiamo la proiezione stereografica

Allora possiamo considerare la proiezione stereografica

$$S^2 \setminus \{(1, 0, 0)\} \xrightarrow{p} \mathbb{R}^2$$

$\swarrow \text{io } p$   
 $\searrow$   
 $IP_{\mathbb{C}}^1$

$\nearrow$  come  $\mathbb{C}$   
 $\mathbb{R}^2 \subseteq IP_{\mathbb{C}}^1$   
 $(x, y) \mapsto [x+iy, 1]$

Vediamo se possiamo estendere questa applicazione in coordinate

$$p(x', y', z') = \left( \frac{x'}{1-z'}, \frac{y'}{1-z'} \right) \in \mathbb{R}^2$$

Qui è dove avviene la magia:

$$\begin{aligned} \text{io } p(x', y', z') &= \left[ \frac{x'}{1-z'} + i \frac{y'}{1-z'}, 1 \right] = \\ &= [x' + iy', 1-z'] \end{aligned}$$

$\nearrow$   
 siamo  
 nel praxthio?

ora se prendo  $z' = 1$   $x' = y' = 0$  ottengo  $[0, 1]$

Quindi posso definire

$$\tilde{p}: S^2 \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$$

$$(x', y', z') \mapsto [x' + iy', 1 - z']$$

ed è continua e ben definita  $\forall$ .

Siccome è un' applicazione da  $S^2$  compatto a  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  che è  $T_2$  è chiusa.

Vediamo che fibre ha: Dato  $[\alpha, \beta] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$

se prendo

$[\bar{\beta}\alpha, \bar{\beta}\beta]$  è lo stesso punto ma ha la seconda coordinata proiettiva reale.

$$f^{-1}([\alpha, \beta]) = f^{-1}(\bar{\beta}\alpha, \bar{\beta}\beta) = \{ (x', y', z') \in S^2 \text{ tali che}$$

$$x' = \operatorname{Re} \bar{\beta}\alpha \quad y' = \operatorname{Im} \bar{\beta}\alpha \quad 1 - z' = \bar{\beta}\beta \Rightarrow z' = 1 - \bar{\beta}\beta$$

$$f^{-1}([\alpha, \beta]) = \{ (\operatorname{Re}(\bar{\beta}\alpha), \operatorname{Im}(\bar{\beta}\alpha), \bar{\beta}\beta) \} \text{ allora è biettiva!}$$

Dunque:

$$g([\alpha, \beta]) = (\operatorname{Re}(\bar{\beta}\alpha), \operatorname{Im}(\bar{\beta}\alpha), 1 - \bar{\beta}\beta)$$

è inversa di  $f$ .

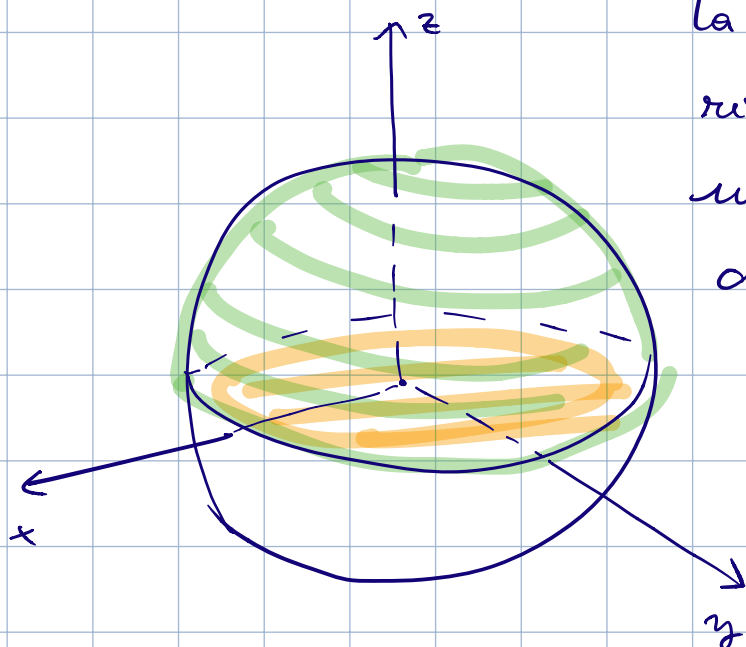
3)  $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$  come figura piana (disco) con i bordi identificati

Abbiamo visto che

$$\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} = \frac{\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}}{\sim} = \frac{S^2}{\sim}$$

e l'identificazione su  $S^2$  identifica i punti antipodali

Prendiamo la "calotta nord"  $S^2 \cap \{z \geq 0\} =: D'$



la proiezione  $p: (x, y, z) \rightarrow (x, y)$

ristretta a  $D'$  dà

un omeomorfismo sul

disco  $D' \xrightarrow{p|_{D'}} D \subseteq \mathbb{R}^2$

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

(è omio che sia continue

e biettiva, ed è chiuso

purché sia un

compatto a un  $T_2$ )

l'identificazione  $\sim$  agisce su  $D$  identificando i punti del bordo secondo questa regola:

$$(x, y) \sim (x', y') \text{ sse } (x, y) = (x', y')$$

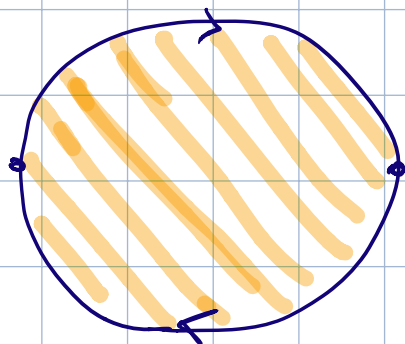
oppure

$$(x, y) = (-x', y')$$

$$\text{Dunque } \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \sim D/\sim$$

Abbiamo quindi visto  $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$  come

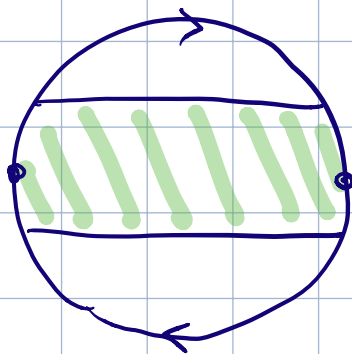
figura piana coi bordi identificati come sopra.



Attenzione:  $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \not\cong S^2$ , ma per dimostrarlo serve qualche strumento più potente di topologia algebrica, come ad esempio il gruppo fondamentale.

Oss:  $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$  contiene un nastro di Möbius.

Basta infatti considerare  
questo sottospazio



È immediato verificare  
che con l'identificazione  
dei bordi viene un nastro



di Möbius

I sottospazi proiettivi di  $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$  e  $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$  sono chiusi: infatti sono  $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$  o  $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$  stessi, oppure rappresentati da una equazione omogenea e  $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$  e  $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$  sono spazi  $T^2$ . Ogni retta di  $\mathbb{A}^2_K$  ( $K = \mathbb{C} \text{ o } \mathbb{R}$ ) è omeomorfa a  $K$  (basta osservare che una affinità induce un omeomorfismo sui sottoinsiemi di  $\mathbb{A}^2_K$ )

Stessa cosa per i sottospazi di  $\mathbb{P}^2_K$ :

Sia  $r \subseteq \mathbb{P}^2_K$  una retta.

$$r: ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$$

allora se prendo  $\tilde{r}: ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$  in  $K^3 \setminus \{0\}$

è un chiuso naturo rispetto alla proiezione  $K^3 \setminus \{0\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^2_K$

$r = \mathbb{P}(\tilde{r})$  è un chiuso in  $\mathbb{P}^2_K$ .  
 $= \pi(\tilde{r})$

Inoltre ogni retta è omeomorfa a  $\mathbb{P}^1_K$  (stessa dimostrazione).

Allo stesso modo si vede che i sottospazi di  $\mathbb{A}^n_K$  e di  $\mathbb{P}^n_K$  sono chiusi, e se  $S \subseteq \mathbb{A}^n_K / T \subseteq \mathbb{P}^n_K$  sottospazio di dimensione  $k$ , è omeomorfo a  $\mathbb{A}^k_K / \mathbb{P}^k_K$ .

Questo ci dice che tutti i sottospazi sono connessi.  
 Inoltre i sottospazi affini non sono compatti,

mentre i sottospazi proiettivi lo sono.

ES: In  $\mathbb{P}_K^2$  la chiusura proiettiva di un sottospazio  $S \subseteq \mathbb{A}_0 \cong \mathbb{A}_K^2$  è la chiusura topologica con la topologia di sottospazio. La stessa affermazione è falsa per  $\mathbb{P}_K^m$  con  $m > 2$ .

le coniche:

Mettiamoci in  $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ .

Ogni conica è affinementemente equivalente a una ed una sola conica della lista:

$\mathcal{C}_1$   $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$  conica generale non degenera

$\mathcal{C}_2$   $x_0^2 + x_1^2 = 0$  conica semplicemente degenera

$\mathcal{C}_3$   $x_0^2 = 0$  conica doppiamente degenera.

Ora vediamo che, dal punto di vista topologico

$\mathcal{C}_1 \sim \mathcal{C}_3 \sim \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  mentre  $\mathcal{C}_2 \not\sim \mathcal{C}_1$

Quindi le classi di omeomorfismo delle coniche proiettive complesse sono due

$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  e l'unione di due rette.

Vediamo che  $\mathcal{C}_1 \sim \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$

$\mathcal{C}_1: x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$

Per la classificazione proiettiva sappiamo che



$\mathcal{C}_1$  è proiettivamente equivalente a queste altre conica non degeneri:

$$\mathcal{C}_4: x_0^2 = x_1 x_2$$

(verificate che è non degeneri)

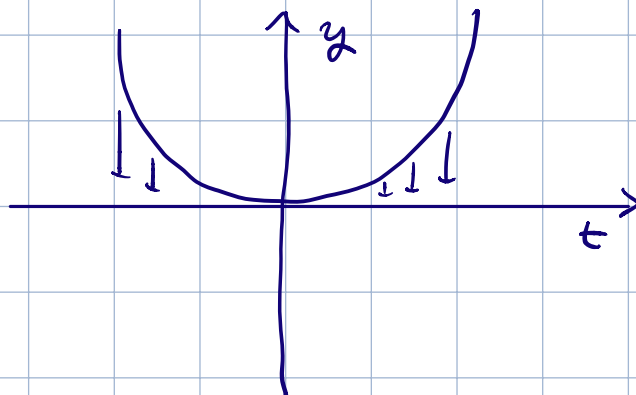
Ora,  $\mathcal{C}_4 \cap U_1$  è, ponendo  $\frac{x_0}{x_1} = y$   $\frac{x_2}{x_1} = t$

$$y^2 = t$$

e semplicemente abbiamo un omeomorfismo con  $\mathbb{C} = \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$  con la proiezione sul secondo fattore.

Considero nel proiettivo la proiezione del punto

$$P = [0, 0, 1] \in \mathcal{C}_4$$



$$\varphi: \mathcal{C}_4 \setminus \{[0, 0, 1]\} \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$$

$$[x_0, x_1, x_2] \mapsto [x_0, x_1]$$

e osservo che su  $\mathcal{C}_4 \setminus \{H_0: x_0=0\}$

$$\begin{aligned} \varphi [x_0, x_1, x_2] &= [x_0, x_1] = [x_0^2, x_1 x_0] = \\ &= [x_1 x_2, x_1 x_0] = [x_2, x_0] \end{aligned}$$

Quindi possiamo definire

$$\tilde{\varphi}: \mathcal{C}_4 \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$$

in questo modo:

$$\tilde{\varphi}([x_0, x_1, x_2]) = \begin{cases} [x_0, x_1] & \text{se } [x_0, x_1, x_2] \neq [0, 0, 1] \\ [x_2, x_0] & \text{se } [x_0, x_1, x_2] \neq [0, 1, 0] \end{cases}$$

e queste funzioni si incollano bene sugli aperti

$$C_4 \cap U_0 = C_4 \setminus \{[0, 0, 1]\}$$

$$\text{e } C_4 \cap U_1 = C_4 \setminus \{[0, 1, 0]\}$$

Quindi

$\tilde{\varphi}$  è continua biiettiva da  $C_4$  a  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$

ora  $C_4$  è chiuso in un compatto, dunque compatto,  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \cong \mathbb{T}^2$

Quindi  $\tilde{\varphi}$  è chiusa.

In tutto  $\tilde{\varphi}$  è un omeomorfismo

Ora,  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \notin \{\text{unione di due rette in } \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2\}$

per lo stesso motivo per cui questo non vale in  $\mathbb{R}^2$ :

se tolgo un punto  $P$  a  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \cong S^2$

$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus \{P\}$  è ancora connesso (è omeomorfo a  $\mathbb{R}^2$ )

mentre se tolgo il punto di intersezione tra le due rette ottengo due componenti connessi.