

Tutto quello che volevate sapere sulla retta di Sorgenfrey...

Considero la seguente famiglia in  $\mathbb{R}$ :

$$\mathcal{B} := \{ [a, b) \mid a < b, a, b \in \mathbb{R} \}$$

$\mathcal{B}$  soddisfa il lemma della base:

(i)  $\bigcup_{a < b} [a, b) = \mathbb{R}$  ok

(ii)  $\forall [a, b), [c, d) \in \mathcal{B}$   
$$[a, b) \cap [c, d) = \begin{cases} [\max\{a, c\}, \min\{b, d\}) & \text{se } c < b \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ok?

Sia  $\tau_S$  la topologia su  $\mathbb{R}$  per cui  $\mathcal{B}$  è una base.

Chiamo  $(\mathbb{R}, \tau_S)$  la retta di Sorgenfrey (cf Manetti)

Riassumiamo le principali proprietà di questa topologia:

$$\tau_e \subsetneq \tau_S \subsetneq \mathcal{O}_{\mathbb{R}}$$

la topologia euclidea è strettamente meno fine delle topologie di Sorgenfrey, che a sua volta è strettamente meno fine delle topologie discrete.

Per vedere la prima inclusione, basta verificare che se prendo una base  $\mathcal{B}$  per  $\tau_e$ , vale che  $\mathcal{B} \subseteq \tau_S$ .

Prendiamo le bolle aperte:

$$\mathcal{B} = \{ (a, b) \mid a < b \}$$

$\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b$  ho

$$(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left[ a - \frac{1}{n}, b \right)}_{\in \tau_S} \Bigg] \in \tau_S \quad \text{ok}$$

Per vedere che l'inclusione è stretto, basta osservare che  $[0, 1) \in \mathcal{T}_S \setminus \mathcal{T}_e$ .

Ovviamente  $\mathcal{T}_S \subseteq \mathcal{O}_{\mathbb{R}} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ .

D'altra parte, i punti non sono chiusi per  $\mathcal{T}_S$ :

$\forall x \in \mathbb{R}$ , ogni aperto per  $\mathcal{T}_S$  che contiene  $x$  contiene anche  $[x, x+\varepsilon)$  per qualche  $\varepsilon > 0$ .

$(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$  è 1-numerabile

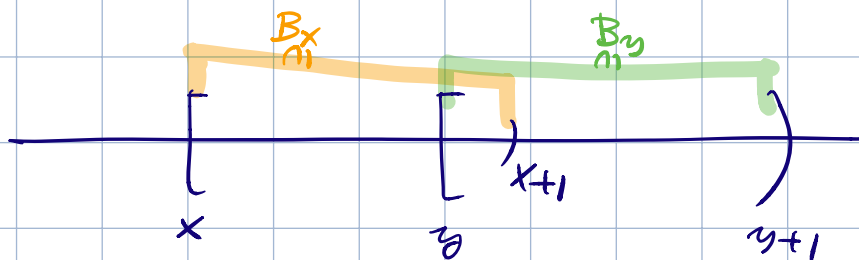
Dato  $x \in \mathbb{R}$ , un sistema fondamentale di intorno di  $x$  per  $\mathcal{T}_S$  è:

$$\mathcal{B}(x) := \{ [x, x + \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}^+ \}$$

Infatti,  $\forall A \in \mathcal{T}_S$  tale che  $A \ni x$ , abbiamo per definizione di  $\mathcal{T}_S$  che  $\exists a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$  tali che  $x \in [a, b) \subseteq A$ , allora chiaramente  $\exists \varepsilon > 0$  tale che  $[x, x+\varepsilon) \subseteq [a, b)$ , e allora  $\exists N \in \mathbb{N}^+$  tale che  $\frac{1}{N} < \varepsilon$   $[x, x + \frac{1}{N}) \subseteq [x, x+\varepsilon) \subseteq [a, b)$  come volevamo.

$(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$  non è 2-numerabile

Sia  $\mathcal{B}$  una base per  $\mathcal{T}_S$ . Voglio vedere che non è numerabile.  $\forall x \in \mathbb{R} \exists B_x \in \mathcal{B}$  tale che  $x \in B_x \subseteq [x, x+1)$ . Allora se  $x \neq y$  (diciamo  $x < y$ )



$B_x \neq B_y$  : ho costruito un'applicazione iniettiva

$\mathbb{R} \hookrightarrow \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}$  non è numerabile!

$(\mathbb{R}, \tau_s)$  è separabile: infatti,  $\mathbb{Q}$  è denso in  $(\mathbb{R}, \tau_s)$

Basta vedere che se prendo  $B$  nello base con cui

abbiamo definito  $\tau_s$ , vale che  $\mathbb{Q} \cap B \neq \emptyset$

$B = [a, b)$  e per la densità di  $\mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$  vale

che  $\exists q \in (a, b) \cap \mathbb{Q}$  (ne esistono infiniti, infatti!).

$(\mathbb{R}, \tau_s)$  non è metrizzabile Abbiamo visto a lezione  
che metrizzabile + 1-numerabile  $\Rightarrow$  2-numerabile.

Se  $(\mathbb{R}, \tau_s)$  fosse metrizzabile sarebbe allora

2-numerabile, ma abbiamo appena visto che

non lo è.

$(\mathbb{R}, \tau_S)$  è uno spazio normale. Siano  $C, D \subseteq \mathbb{R}$  due chiusi disgiunti per  $\tau_S$ . Voglio trovare due aperti disgiunti che contengano l'uno e l'altro.

Dato  $c \in C$ , poiché  $D$  è chiuso, esiste  $\varepsilon_c > 0$  tale che  $[c, c + \varepsilon_c) \subseteq \mathbb{R} \setminus D$ . Considero ora  $U := \bigcup_{c \in C} [c, c + \varepsilon_c)$ . Ovviamente  $U$  è un aperto per  $\tau_S$  e  $C \subseteq U$ .

Faccio anche lo stesso discorso per  $D$ .  $\forall d \in D \exists \delta_d > 0$  tale che  $[d, d + \delta_d) \subseteq \mathbb{R} \setminus C$ . Sia  $V := \bigcup_{d \in D} [d, d + \delta_d) \in \tau_S$ .

Chiaramente  $D \subseteq V$ .

Ora vediamo qual'è l'intersezione tra  $U$  e  $V$ .

$$\forall c \in C \quad \forall d \in D \quad [c, c + \varepsilon_c) \cap [d, d + \delta_d) = \emptyset$$

In fatti, guardiamo le possibilità: per l'unf

$[c, c + \varepsilon_c) \cap [d, d + \delta_d)$ , se non è vuoto, è necessariamente delle forme  $[c, a)$  oppure  $[d, a)$ , ma nel primo caso  $c \in [d, d + \delta_d)$  (assurdo) nel secondo caso  $d \in [c, c + \varepsilon_c)$  (assurdo).

In sostanza abbiamo usato che in  $(\mathbb{R}, \tau_S)$  abbiamo "tanti aperti".

Il prodotto  $(\mathbb{R}, \tau_S) \times (\mathbb{R}, \tau_S)$  non è normale. Infatti vale che

Uno spazio separabile che contiene un sottoinsieme discreto non numerabile non è normale (cf Ser 2)

Basta vedere che  $S = \{x+y=0\} \subseteq \mathbb{R}^2$  è discreto con la topologia indotta da  $\tau_S$  su entrambi i fattori.

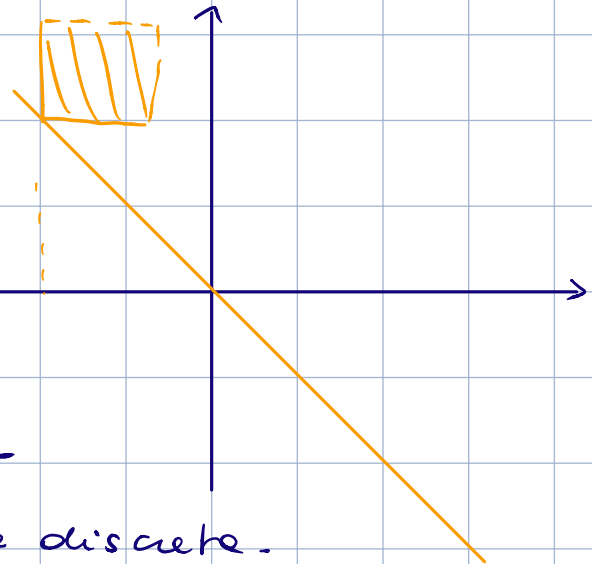
Prendo,  $\forall (x, -x) \in S$

$$[x, x+1) \times [-x, -x+1) = \mathcal{U}$$

$\mathcal{U}$  appartiene ovviamente alle topologie prodotto, in  $(\mathbb{R}, \tau_S) \times (\mathbb{R}, \tau_S)$

$$\text{e } \mathcal{U} \cap S = \{(x, -x)\}$$

Quindi la topologia prodotto induce su  $S$  la topologia discreta.



Quindi in generale il prodotto di spazi  $T_4$  non è detto che sia  $T_4$ .

Notate che ogni fibra di  $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  con le topologie sopra è omeomorfa a  $(\mathbb{R}, \tau_S)$  quindi non è neanche vero che sotto-spazi di spazi  $T_4$  sono  $T_4$ .

La retta di Sorgenfrey non è compatta: basta ricordare che  $\mathcal{T}_e \subseteq \mathcal{T}_S$  e  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$  non è compatto: un ricoprimento aperto per  $\mathcal{T}_e$  è anche un ricoprimento per  $\mathcal{T}_S$  e se  $A \in \mathcal{T}_e$  è ricoprimento aperto che non ammette sottoscoprimenti finiti, lo è per  $\mathcal{T}_S$ .

A differenza di  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$  la retta di Sorgenfrey non è connessa: Infatti, si prende

$$A = (-\infty, 0) \quad B = [0, +\infty) \quad , \quad B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} [0, n) \in \mathcal{T}_S$$

$$A \in \mathcal{T}_e \subseteq \mathcal{T}_S$$

$A$  e  $B$  sono due aperti non vuoti disgiunti la cui unione è tutto  $\mathbb{R}$ .