Geometria I

CdL in Matematica

Università di Pavia

Prova scritta dell'11 giugno 2019

Giustificare sempre le risposte.

1. Definite le nozioni di spazio topologico compatto, metrizzabile, di Hausdorff (o T2). *[3 punti]*

   Vero o falso? [se vero spiegate perchè, se falso esibite un controesempio]

   (a) Un sottospazio chiuso di uno spazio topologico compatto è necessariamente compatto. *[3 punti]*

   (b) Un sottospazio compatto di uno spazio topologico è necessariamente chiuso. *[3 punti]*

   (c) Un sottospazio chiuso di uno spazio topologico metrizzabile è necessariamente compatto. *[3 punti]*

2. Si considerino in $\mathbb{R}^3$ i seguenti sottospazi:

$$X = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = z^2\} \setminus \{(x, y, z) \mid x = z = 0\},$$

$$Y = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \setminus \{(x, y, z) \mid x = z = 0\},$$

$$Z = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

   (a) Si stabilisca se sono connessi, e si trovino le loro componenti connesse. *[4 punti]*

   (b) Si suddividano in classi di omeomorfismo. *[4 punti]*

3. Si considerino i seguenti 4 punti in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$: $P_0 = [2, 1, 0]$, $P_1 = [1, 1, 0]$, $P_2 = [1, 1, -1]$, $P_3 = [2, 1, 1]$;

   (a) Verificare che sono in posizione generale (definire un insieme di punti in posizione generale). *[4 punti]*

   (b) Determinare, se esiste, la proiettività f di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ che soddisfa le condizioni seguenti: $f(P_0) = [1, 0, 0]$, $f(P_1) = [0, 1, 0]$, $f(P_2) = [0, 0, 1]$, $f(P_3) = [1, 1, 1]$. *[3 punti]*

   (c) Data la proiettività f del punto precedente, stabilire se ha punti fissi, e, in caso trovare il luogo fisso. *[3 punti]*

Soluzioni scritto di prova 11/06/2019

[scrivo tutte le soluzioni come se fosse un compito]

1)

X spazio topologico si dice compatto se ogni suo ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento finito

un ricoprimento aperto è una famiglia $\mathcal{A} \subseteq \tau_X$ tale che $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = X$

un sottoricoprimento (di $\mathcal{A}$) è una sottofamiglia $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ che sia un ricoprimento.

X spazio topologico si dice metrizzabile se $\exists\, d$ metrica su X che induce la topologia di X : $\tau_d = \tau_X$

X spazio topologico si dice T2 (o di Hausdorff) se $\forall x, y \in X$ con $x \neq y$ $\exists\, \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \tau_X$ tali che $x \in \mathcal{U}$, $y \in \mathcal{V}$ e $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$

(a) chiuso in un compatto è compatto : <u>VERO</u>

Sia X compatto $C \subseteq X$ un chiuso.

Sia $\mathcal{A}$ un ricoprimento aperto di C: $\mathcal{A} \subseteq \tau_X$ e

$$C \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \quad (*)$$

considero la famiglia

$$\mathcal{F} = \mathcal{A} \cup \{X \setminus C\}$$

è un ricoprimento aperto di X, infatti

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \;\cup\; (X \setminus C) = X \quad \text{per } (*)$$

Estraggo un sottoricoprimento finito per la compattezza di X: $\exists\, A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}$ tali che

$A_1 \cup \dots \cup A_k \cup (X \setminus C) = X \implies A_1 \dots A_k$ è un sottoricoprimento finito di C.

(b) Un compatto in uno spazio topologico è chiuso. FALSO
Basta prendere ad esempio $X = \{a, b\}$ con la topologia concreta $\mathcal{C} = \{X, \emptyset\}$
allora $\{a\}$ è compatto (è il singoletto), ma non è chiuso (né aperto) in X.
È vero invece che un compatto in uno spazio T2 è necessariamente chiuso.

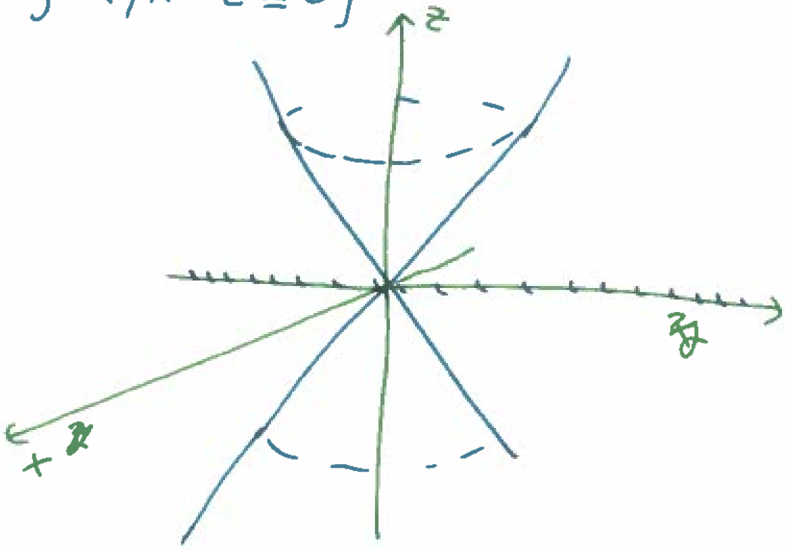
(c) Chiuso in un uno spazio metrizzabile è compatto
Falso:
Prendo $(\mathbb{R}, \tau_e)$ che è metrizzabile.

$\mathbb{R}$ è chiuso ma non è compatto: ad esempio
$\mathcal{A} = \{(-n, n),\ n \in \mathbb{N}^+\}$ è un ricoprimento aperto di $\mathbb{R}$
le cui sottofamiglie finite non sono ricoprimenti:
se $\{n_1, \dots n_k\} \subseteq \mathbb{N}^+$ $\quad \bigcup_{i=1}^{k} (-n_i, n_i) = (-\max\{n_i\}, \max\{n_i\})$

$$\cap \neq \mathbb{R}$$

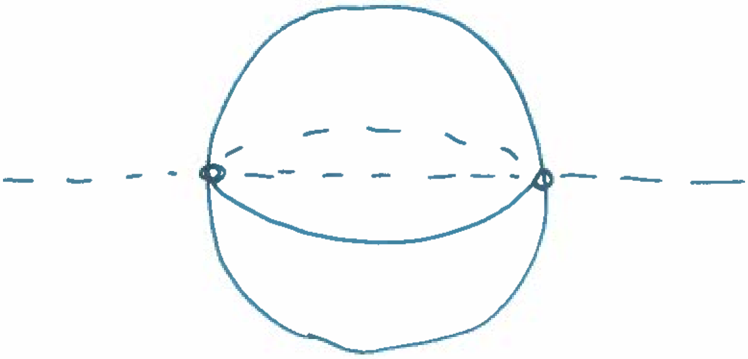
2) Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$

$$X = \{x^2+y^2=z^2\} \setminus \{x=z=0\}$$



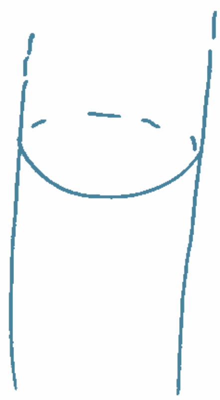
X è cono meno il vertice

$$Y = \{x^2+y^2+z^2-1=0\} \setminus \{x=z=0\}$$



Y è S^2 privato dei punti $(0,1,0)$ e $(0,-1,0)$

$$Z = \{x^2+y^2=1\}$$



Z è il cilindro su S^1

$Z \sim S^1 \times \mathbb{R}$

(a) <u>X non è connesso</u>: ad esempio

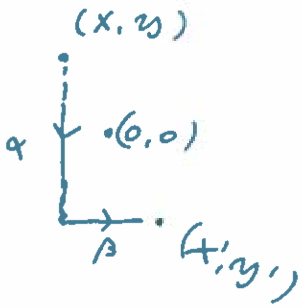
$$\mathcal{U} = X \cap \{z > 0\} \qquad \mathcal{V} = X \cap \{z < 0\}$$

sono due aperti non vuoti disgiunti di X la cui unione è tutto X.

<u>Y è connesso per archi</u>: ad esempio, con la proiezione stereografica abbiamo che Y è omeomorfo a $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ che è connesso per archi, e la connessione per archi è una proprietà topologica.

$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ è cpa:

Dati $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
non è limitativo supporre che $x \neq 0$ e $y' \neq 0$



allora prendo il cammino

$$\alpha(t) := (x, (1-t)y + ty') \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \qquad \begin{matrix} \alpha(0) = (x,y) \\ \alpha(1) = (x,y') \end{matrix}$$

e il cammino $\beta(t) = ((1-t)x + tx', y') \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\beta(0) = (x,y')$$
$$\beta(1) = (x',y)$$

poi considero la concatenazione $\alpha * \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & t \in [0, 1/2] \\ \beta(2t-1) & t \in [1/2, 1] \end{cases}$

$\alpha * \beta$ è un cammino in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ fra (x,y) e (x',y')

Ora basta osservare che cpa $\Rightarrow$ connesso.

Z è connesso per archi:

infatti S^1 è connesso per archi (ad esempio è immagine di $\mathbb{R}$ tramite la mappa esponenziale)

e $\mathbb{R}$ è cpa

e prodotto di cpa è cpa.

(b) X non è connesso, dunque non può essere omeomorfo a Y né a Z, perché la connessione è una proprietà topologica.

Y è omeomorfo, come già osservato, a $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

D'altra parte Z è omeomorfo anch'esso a $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

ad esempio un omeomorfismo è dato da

$$\mathbb{R}^3 \supseteq S^1 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

$$(u, v, s) \longmapsto ((u, v) \cdot e^s)$$

Dunque $Y \sim Z$ e le classi di omeomorfismo sono $\{X\}$ $\{Y, Z\}$

3) $P_0 : [2.1.0]$ $P_1[1.1,0]$ $P_2 : [1.1,-1]$ $P_3 : [2.1.1]$

(a) sono in posizione generale:

Devo verificare che sono a 3 a 3 non allineati:

$$\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right) = \mathbb{R}^3$$ tolgo P_3

$$\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \mathbb{R}^3$$ tolgo P_2

$$\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \mathbb{R}^3$$ tolgo P_0

$$\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) =$$ tolgo P_1

$= \mathbb{R}^3$ OK

(b) poiché anche i punti

$[0,1,0]$ $[0,0,1]$ e $[1,1,1]$

sono, come ben sappiamo, in posizione generale, $\exists!$ proiettività che manda i P_i in questi punti (rispettando l'ordine)

è facile scrivere l'inversa di questa proiettività:

osservo che

$$\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$$

dunque la matrice della proiettività

che manda
$$[1,0,0] \longmapsto P_0$$
$$[0,1,0] \longmapsto P_1$$
$$[0,0,1] \longmapsto P_2$$
$$[1,1,1] \longmapsto P_3$$

è della forma: (cf. Sernesi prop 27.1 e seguenti.)

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

per trovare la matrice della proiettività cercata basta trovare l'inversa di M, ad esempio col metodo di Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$N = M^{-1}$

Dunque la proiettività cercata è quella associata ad $N = M^{-1}$

$$\varphi([x_0, x_1, x_2]) = (x_0 - x_1, -x_0 + 2x_1 + x_2, x_2)$$

(c) cerco punti fissi:
questo equivale a trovare gli autospazi della matrice

$$N: \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

faccio il polinomio caratteristico

$$|N - tI| = \begin{vmatrix} 1-t & -1 & 0 \\ -1 & 2-t & 1 \\ 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = (1-t)\begin{vmatrix} 1-t & -1 \\ -1 & 2-t \end{vmatrix} =$$

$$= (1-t)\left((1-t)(2-t) - 1\right) =$$

$$= (1-t)\left(t^2 - 3t + 1\right)$$

$$\Delta = 9 - 4 = 5$$

questo polinomio ha tre radici distinte:

$$t_0 = 1, \quad t_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad t_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Dunque la proiettività ha 3 punti distinti fissi (9)

corrispondenti ai tre autospazi di

dimensione 1 di N

$$V_1 = \ker(N-I) = \ker\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & \cancel{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \{-x_0 + x_2 + x_2 = x_1 = 0\}$$

$$x_0 = x_2$$

$$V_1 = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dunque $\rightsquigarrow$ il primo punto fisso è $F_1 = [1,0,1]$

$$V_{\frac{3 \pm \sqrt5}{2}} = \ker\left(N - \tfrac{3-\sqrt5}{2} I\right) =$$

$$= \ker\begin{pmatrix} 1 - \frac{3-\sqrt5}{2} & -1 & 0 \\ -1 & 2 - \frac{3-\sqrt5}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{3-\sqrt5}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \ker\begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt5}{2} & -1 & 0 \\ -1 & \frac{1+\sqrt5}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{-1+\sqrt5}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \left\{ x_2 = 0,\ x_0 = \frac{1+\sqrt5}{2} x_1 \right\} \qquad F_2 = [1+\sqrt5, 2, 0]$$

$$V_{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \ker\left(N - \frac{3+\sqrt{5}}{2} I\right) =$$

$$= \ker \begin{pmatrix} 1 - \frac{3+\sqrt{5}}{2} & -1 & 0 \\ -1 & 2-\frac{3+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1-\frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \ker \begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & -1 & 0 \\ -1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \left\{ x_2 = x_0 - \frac{1-\sqrt{5}}{2} x_1 = 0 \right\}$$

$$F_3 = \left[1-\sqrt{5} \, , \, 2 \, , \, 0 \right]$$
