

1) $P_1: [2, 1, -1]$ $P_2: [0, 1, 1]$ $P_3: [-1, -1, 2]$ in $IP_{\mathbb{R}}^2$

(a) Sono in posizione generale? Lo sono se e solo se

$$L(P_1, P_2, P_3) = IP_{\mathbb{R}}^2 \quad (\text{generano tutto } IP_{\mathbb{R}}^2)$$

ovvero

se non sono allineati.

Basta controllare che $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ siano indipendenti in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \underline{\text{lo sono.}}$$

1^a riga - 2^a riga

(b) $L(P_1, P_2)$ ha equazione $\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, ovvero

$$2x_0 - 2x_1 + 2x_2 = 0 \quad \boxed{x_0 - x_1 + x_2 = 0}$$

(c) Per avere P_1, P_2, P_3, Q in posizione generale basta prendere Q che non giaccia su nessuna delle rette tra due dei P_i .

Algebricamente, basta avere che, dette q_0, q_1, q_2 coordinate omogenee di Q il vettore

$\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ sia combinazione lineare dei v_i a coefficienti tutti non nulli.

Q che vanno bene: $\left\{ \lambda v_1 + \mu v_2 + \gamma v_3, \quad \lambda, \mu, \gamma \neq 0 \right\}$

Ad esempio posso prendere $\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = v_1 + v_2 + v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

per prendere R tale che P_1, P_2, P_3, Q, R siano in posizione generale,

deve valere che R non è allineato con nessuno degli altri.

punti a coppie.

Se prendo $v = \lambda v_1 + \mu v_2 + \gamma v_3$ devo avere $\lambda, \mu, \gamma \neq 0$ come prima prendiamo ad esempio

$$v = -v_1 + v_2 + 2v_3$$

Controllo che $[v]$ vada bene rispetto anche a $Q = [v_Q]$

$$v_Q = v_1 + v_2 + v_3 \quad \text{allora} \quad v_2 = -v_1 - v_3 + v_Q$$

$$v = -v_1 - v_1 - v_3 + v_Q + 2v_3 = -2v_1 + v_3 + v_Q \quad \underline{\text{Ok}} \quad \checkmark$$

(d) Esistono infinite proiettività con le proprietà richieste.

Una generica tale proiettività è associata ad una matrice della forma

$$M = \left(\lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \quad \text{con } \lambda, \mu, \gamma \neq 0$$

(e) I punti P_1, P_2, P_3 sono in posizione generale significa

3 tre punti P_1, P_2, P_3 sono tali che $L(P_1, P_2, P_3) = \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$

In dualità:

ai punti P_i corrispondono rette r_i in $\mathbb{P}^{2V} \cong \mathbb{P}^2$

Allo spazio generato corrisponde l'intersezione in $\mathbb{P}^{2V} \cong \mathbb{P}^2$

Allo spazio $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ corrisponde $\emptyset$

la frase duale è dunque:

Le tre rette r_1, r_2, r_3 hanno $r_1 \cap r_2 \cap r_3 = \emptyset$

(equivalentemente le tre rette non appartengono ad uno stesso fascio)

Dove $\pi_1: 2x_0 + x_1 - x_2 = 0$, $\pi_2: x_1 + x_2 = 0$,

$\pi_3: x_0 - x_1 + 2x_2 = 0$

Se faccio $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$, cioè metto a sistema le tre equazioni, ottengo $x_0 = x_1 = x_2 = 0$, cioè $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \emptyset$, come volevamo.

2) $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$ $\mathcal{K} = \{ A \subseteq \mathbb{R} \mid \text{te } |\mathbb{R} \setminus A| < +\infty \} \cup \{ \emptyset \}$
topologia cofinita su $\mathbb{R}$

(a) Sì, $\mathcal{K}$ è confrontabile con $\mathcal{T}_e$, infatti, se $A \in \mathcal{K}$

$A = \mathbb{R} \setminus F$ con $F = \{x_1, \dots, x_n\}$ insieme finito di punti

(diciamo $x_i < x_{i+1}$ $\forall i$)

e allora $A = (-\infty, x_1) \cup (x_1, x_2) \cup \dots \cup (x_n, +\infty) \in \mathcal{T}_e$

Detto in altre parole, i chiusi per $\mathcal{K}$ sono gli insiemi finiti di punti e $\mathbb{R}$ stesso, che sono chiusi anche per $\mathcal{T}_e$, quindi $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{T}_e$.

D'altra parte $(-\infty, 1) \in \mathcal{T}_e$ ma $(-\infty, 1) \notin \mathcal{K}$

Quindi $\mathcal{K} \subsetneq \mathcal{T}_e$: $\mathcal{K}$ è strettamente meno fine di $\mathcal{T}_e$

(b) $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$ non è 1-numerabile. Infatti,

sia $x \in \mathbb{R}$. Supponiamo per assurdo che esista
 $\mathcal{I}(x)$ un sistema fondamentale di intorno numerabile:

$\mathcal{I}(x) = \{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Deve valere che $\forall n \exists A \in \mathcal{I}$ tale che
 $x \in A \subseteq U_n$ $A = \mathbb{R} \setminus F$ con F finito, quindi

$$U_n = \mathbb{R} \setminus F_n \text{ con } |F_n| < +\infty$$

Costruisco ora un intorno aperto di x che non è contenuto in
alcuno degli U_n : considero $E := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$, che è una unione
numerabile di insiemi finiti, dunque E è numerabile.

Poiché $\mathbb{R}$ non è numerabile, $E \subsetneq \mathbb{R}$. Sia $y \in \mathbb{R} \setminus E$.

Se prendo $U := \mathbb{R} \setminus \{y\}$, è un intorno aperto di x tale
che $\forall n \in \mathbb{N} \quad y \notin F_n$, quindi $U \not\subseteq U_n$. Assurdo.

Poiché 2-numerabile (a base numerabile) $\Rightarrow$ 1-numerabile,
a maggior ragione $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$ non è 2-numerabile.

(c) Verifichiamo direttamente che $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$ è connesso per
archi: un arco $\alpha: I \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{K})$ è continuo se e solo se
 $\forall x \in \mathbb{R} \quad \alpha^{-1}(x)$ è un chiuso in I . Se prendo ad
esempio $x, y \in \mathbb{R}$ e considero $\alpha(t) = tx + (1-t)y$, $t \in I$
(il segmento fra x e y), α è sempre continuo.
Quindi $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$ è connesso per archi. Poiché cpa $\Rightarrow$
connesso, vediamo subito che $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$ è anche connesso.

(d) Sì, $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$ è compatto. Sia $\mathcal{A}$ un ricoprimento aperto di $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$. Sia $A \in \mathcal{A}$ aperto non vuoto. $A = \mathbb{R} \setminus F$ con $|F| < +\infty$. Siccome $\mathcal{A}$ è un ricoprimento, $\forall x \in F \exists A_x \in \mathcal{A} \text{ t.c. } x \in A_x$.
 La famiglia $\{A\} \cup \{A_x, x \in F\}$ è un sotto-ricoprimento finito di $\mathcal{A}$.

(e) Sia $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione polinomiale.

Se $p \equiv c \in \mathbb{R}$ ovviamente p è continua, essendo costante.

Se $p \in \mathbb{R}[X] \setminus \mathbb{R}$, per ogni $y \in \mathbb{R}$

$$p^{-1}(y) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tali che } p(x) = y\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{radici del polinomio non} \\ \text{nullo } p(x) - y = 0 \end{array} \right\}$$

Quindi le fibre sono finito. Ora, $p: (\mathbb{R}, \mathcal{K}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{K})$ è continua se e solo se $\forall C \subseteq \mathbb{R}$ chiuso, $p^{-1}(C)$ è chiuso, quindi ogni funzione polinomiale è continua.

Consideriamo ora $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x \in [0, 1] \\ x-1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

f è continua per τ_c (in particolare e in arrivo) ma $f^{-1}(0) = [0, 1]$ che ha cardinalità infinita, quindi f non è continua da $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$ in $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$.