# Soluzioni degli esercizi di Pasqua 2020

1. Dati 5 punti in posizione generale in $\mathbb{P}^3_K$, è vero che essi sono a tre a tre non allineati? Viceversa, se prendo 5 punti in $\mathbb{P}^3_K$ a tre a tre non allineati, essi sono in posizione generale?

Sì la prima affermazione è vera: $P_0\, P_1\, P_2\, P_3\, P_4$ in $\mathbb{P}^3_K$ sono in posizione generale se e solo se ogni 4-terna di punti in questo insieme generano tutto $\mathbb{P}^3_K$. In particolare ogni terna di punti in questo insieme non possono essere allineati: se avessi per assurdo $P_0\, P_1\, P_2$ allineati, allora

$\dim L(P_0, P_1, P_2) = 1$ e $\dim L(P_0, P_1, P_2, P_3) \leq 2$

(infatti se $P_i = [v_i]$ $L(P_0 .. P_2) = \mathbb{P}(\mathrm{span}(v_0, .., v_2))$
$L(P_0, \dots, P_3) = \mathbb{P}(\mathrm{span}(v_0, \dots, v_3))$ ).

D'altra parte, tale condizione è solo necessaria e non sufficiente: la seconda affermazione è falsa: prendiamo

$P_0 = [1,0,0,0]$ $P_1 = [0,1,0,0]$ $P_2 = [0,0,1,0]$

(che ovviamente non sono allineati) e

$P_3 = [1,1,1,0]$ $P_4 = [0,0,0,1]$

$L(P_0, P_1, P_2, P_3) = L(P_0, P_1, P_2) = \{x_3 = 0\}$

quindi questi punti non sono in posizione generale, ma è vero che sono a tre a tre non allineati:

$P_3 \notin L(P_0, P_1) = \{x_2 = x_3 = 0\}$ $\quad$ $P_3 \notin L(P_1, P_2) = \{x_1 = x_3 = 0\}$

$P_3 \notin L(P_0\, P_4) = \{x_2 = x_1 = 0\}$ $\quad$ $P_3 \notin L(P_1, P_4) = \{x_0 = x_2 = 0\}$

eccetera ...

**2.** (dal Foglio 3) Siano $A, B, C$ tre punti di un piano proiettivo $\mathbb{P}$ in posizione generale; sia $r$ una retta che non contenga nessuno dei tre punti. Si dimostri che esiste un'unica proiettività $f$ di $\mathbb{P}$ tale che $f(A) = A$, $f(B) = C$, $f(C) = B$ , $f(r) = r$.

Io so che dati due insiemi di 4 punti in posizione generale in $\mathbb{P}$ $\exists!$ $f \in \mathbb{P}GL(\mathbb{P})$ che li manda uno nell'altro (con ordine). Ma qui ho 3 punti in posizione generale e una retta che viene mandata in sé. Come fare?

Se prendo

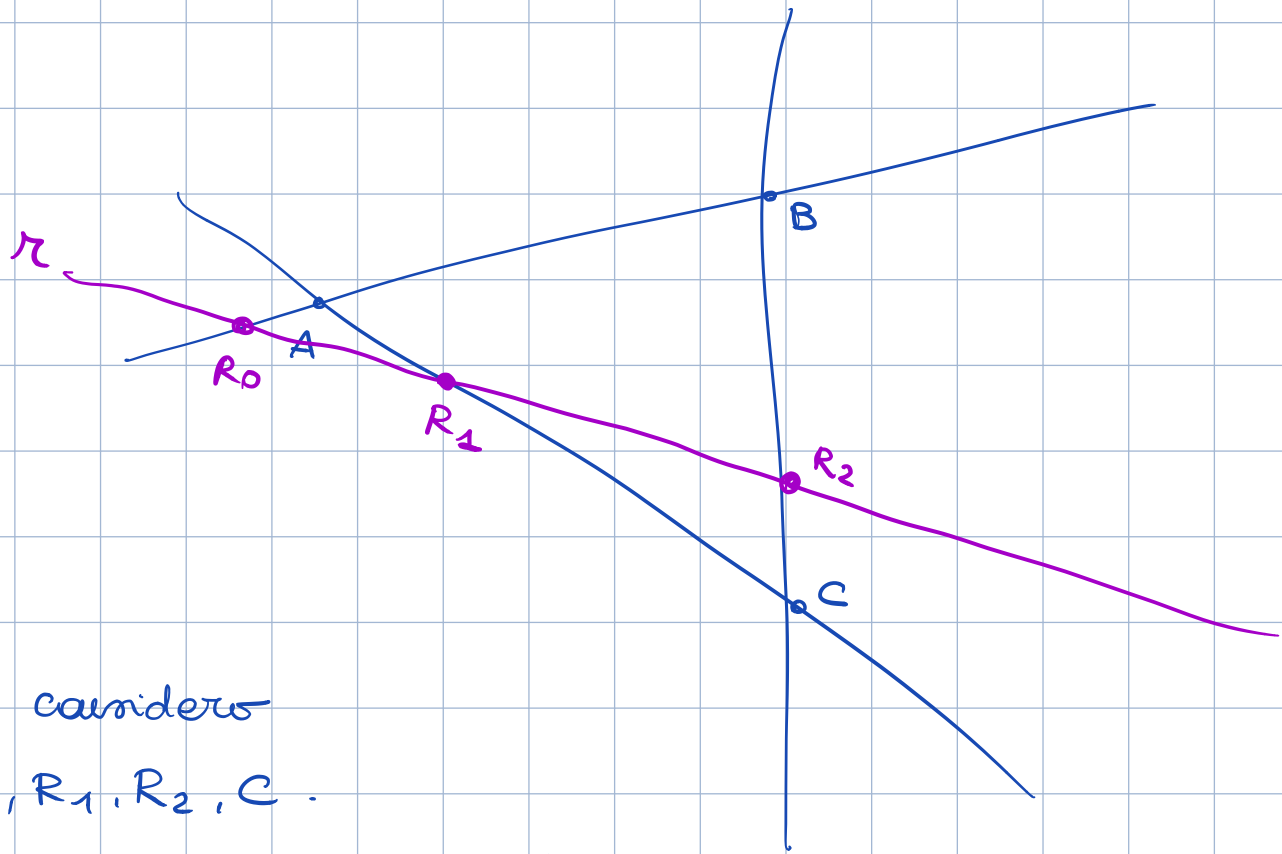
$$\left.\begin{aligned} L(A,B) \cap r &= R_0 \\ L(A,C) \cap r &= R_1 \\ L(B,C) \cap r &= R_2 \end{aligned}\right\} \text{questi sono tre punti distinti su } r \cong \mathbb{P}^1_K$$

Sono distinti perché

$$\left.\begin{aligned} L(A,B) \cap L(A,C) &= A \notin r \\ L(A,B) \cap L(B,C) &= B \notin r \\ L(A,C) \cap L(B,C) &= C \notin r \end{aligned}\right| \text{per ipotesi}$$

Quindi $R_0\ R_1\ R_2$ sono tre punti in posizione generale in $r$ come retta affine. Sappiamo per ipotesi che $f(R_0) = R_1$ $f(R_1) = R_0$ , $f(R_2) = R_2$ Quindi $\exists!$ proiettività di $r$ che soddisfa le condizioni. La chiamo $f_r$.

Per ora ho che i dati del problema mi individuano univocamente $f_r : r \to r$ proiettività di $r$. Ovviamente voglio che $f_r$ sia la restrizione della proiettività che troverò ad $r$. $f_r$ non è l'identità su $r$.




Ora considero

$A, R_1, R_2, C$.

Sono in posizione generale.

$A, R_0, R_2, B$ pure.

$\exists!\ f \in \mathbb{P}GL(\mathbb{P})$ tale che $f(A)=A$, $f(R_1)=R_0$, $f(R_2)=R_2$ $f(C)=B$

Vediamo ora che $f$ è nelle condizioni richieste:

$$L(R_0,R_1) = r = f(L(R_1,R_2)) = f(r).$$

Quindi $f(r)=r$, e inoltre

$$f(R_0) = f(L(A,B)\cap r) = L(A,C)\cap r = R_1$$

Allora $f_{|r} = g$ necessariamente.

L'ultima cosa da vedere è che $f(B)=C$

Basta osservare che

$$f(B) = f(L(A,R_0)\cap L(C,R_2)) = L(A,R_1)\cap L(B,R_2) =$$
$$= C$$ come volevamo!

Attenzione! Nel modo in cui provavo in classe non mi viene!

3. In $\mathbb{P}^2_K$, considero il punto $P = [0, 0, 1]$.

(a) Scrivere le equazioni di tutte le rette che passano per $P$ (lo chiameremo il fascio di rette per $P$).

(b) Verificare che se considero la carta affine $U_2 \cong \mathbb{A}^2_K$ rispetto a $x_2$ il fascio del punto precedente diventa un fascio proprio di rette in $\mathbb{A}^2_K$ (passanti da quale punto?).

(c) Verificare che se considero la carta affine $U_0 \cong \mathbb{A}^2_K$ rispetto a $x_0$, il fascio del punto (a) diventa un fascio improprio di rette (di che direzione?).

(a) Scrivere le equazioni di tutte le rette che passano per $P = [0,0,1]$ corrisponde a scrivere le equazioni di tutti i piani in $K^3$ che contengono span $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, quindi al fascio di piani per questa retta: $\mathcal{F} := \{ \lambda x_0 + \mu x_1 = 0 ,\ [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1 \}$

(b) $\mathcal{U}_2 = \mathbb{P}^2_K \setminus \mathbb{H}_2 \qquad \mathbb{H}_2 = \{ x_2 = 0 \}$

$\mathbb{A}^2_K \longrightarrow \mathcal{U}_2$

$(y_1, y_2) \longmapsto [y_1, y_2, 1]$

la retta di equazione $\lambda x_0 + \mu x_1 = 0$ in $\mathbb{A}^1_K$ con queste coordinate affini diventa $\lambda y_1 + \mu y_2 = 0$

Quindi $\mathcal{F} \cap \mathcal{U}_1$ diventa il fascio di rette per $(0,0)$

(c) $\mathcal{U}_0 = \mathbb{P}^2_K \setminus \mathbb{H}_0 \qquad \mathbb{H}_0 = \{ x_0 = 0 \}$

$\mathbb{A}^2_K \longrightarrow \mathcal{U}_0 \qquad \mathcal{U}_0 \longrightarrow \mathbb{A}^2_K$

$(z_1, z_2) \longmapsto [1, z_1, z_2] \qquad [x_0, x_1, x_2] \longmapsto \left[\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right]$

la retta di equazione $\lambda x_0 + \mu x_1 = 0$ diventa la retta di equazione $\lambda + \mu z_1 = 0$

Quindi $\mathcal{F} \cap \mathcal{U}_0 =$ fascio improprio di rette parallele all'asse $z_2$ (di direzione $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$)

4. Siano $P_0, P_1, P_2$ punti di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$. Si consideri l'inclusione $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ fatta rispetto a $x_0$. Discutere le seguenti affermazioni (possono essere vere o false- per verificare che false bisogna fare un controesempio):

(a) Se $P_0, P_1, P_2$ sono affinemente indipendenti, allora essi sono in posizione generale in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.

(b) Se $P_0, P_1, P_2$ non sono affinemente indipendenti, comunque possono essere in posizione generale in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.

(c) Supponiamo che $P_0, P_1, P_2$ siano affinemente indipendenti. Sia $\mathbb{H}_0 \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ l'iperpiano di equazione $x_0 = 0$. Dato qualunque punto $Q \in \mathbb{H}_0$, i punti $P_0, P_1, P_2, Q$ sono in posizione generale.

(a) E' vera: in coordinate ho $P_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ $P_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ $P_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$

tali che $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ sono indipendenti in $\mathbb{R}^2$

In $\mathbb{P}^2_K$ ho

$$P_0 \begin{bmatrix} 1 \\ x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \quad P_1 \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad P_2 \begin{bmatrix} 1 \\ x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

e ho che

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_0 & x_2 \\ y_0 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ y_0 & y_1 \end{vmatrix}$$

$$\parallel$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x_0 - x_1 & x_1 & x_2 - x_1 \\ y_0 - y_1 & y & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x_0 - x_1 & x_2 - x_1 \\ y_0 - y_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} \neq 0$$

(b) Falso! Se $P_0, P_1, P_2$ sono affinemente dipendenti in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, significa che $L(P_0, P_1, P_2) =$ retta in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, ma allora $L(P_0, P_1, P_2) = \overline{\ell}$ in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, quindi $P_0$ $P_1$ $P_2$ risultano dipendenti anche in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$!

(c) Falso!. Infatti, con le stesse notazioni dell'esercizio precedente, $\overline{\ell} \cap \mathbb{H}_0$ è un punto in $\mathbb{H}_0$ che è dipendente da $P_0, P_1, P_2$!

5. In un piano affine $\mathbb{A}$ siano date due terne di rette $\{l_1, l_2, l_3\}$ e $\{r_1, r_2, r_3\}$ ciascuna composta da tre rette a due a due non parallele e tali che non c'è nessun punto in comune a tutte e tre.

(a) È vero che esiste sempre un'affinità $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ tale che $f(l_i) = r_i$ per $i = 1, 2, 3$? In caso positivo, $f$ è unica?

(b) Si calcoli esplicitamente una tale affinità nel caso in cui $\mathbb{A} = \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, con $(x, y, z) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ e le equazioni cartesiane delle rette siano:

$$\begin{array}{ll} l_1 : x = 0 & r_1 : x + y = 1 \\ l_2 : y = 0 & r_2 : 2x+y = 0 \\ l_3 : x-y=1 & r_3 : x = 1 \end{array}$$

(a) Il fatto che le rette non sono parallele a due a due significa che $l_1 \cap l_2 = \{P\}$ $\quad l_1 \cap l_3 = \{Q\}$ $\quad l_2 \cap l_3 = \{R\}$
(le intersezioni a due a due sono dei punti)
Il fatto che $l_1$ $l_2$ $l_3$ non appartengono a uno stesso fascio significa che $P, Q, R$ sono distinti.
Stesso discorso per le $r_i$: $r_1 \cap r_2 = S$ $\quad r_1 \cap r_3 = T$ $\quad r_2 \cap r_3 = U$
tutti e tre punti distinti.
Non solo questi punti sono distinti, sono affinemente indipendenti!
Infatti, se $P, Q$ ed $R$ fossero allineati, allora dovrei avere che $l_1 = L(P,Q) = L(P,R) = l_2$, ma le rette sono distinte.
Quindi, esiste un'unica affinità $f$ che manda $P, Q, R$ in $S, T, U$ rispettivamente. Tale affinità manda $\underset{\substack{\parallel \\ l_1}}{L(P,Q)}$ in $\underset{\substack{\parallel \\ r_1}}{L(S,T)}$

$$l_2 = L(P,R) \text{ in } L(S,U) = r_2$$
$$l_3 = L(Q,R) \text{ in } L(T,U) = r_2 \qquad \underline{\text{ok!}}$$

(b) Per trovare la affinità richiesta, calcoliamo i tre punti di intersezione nel caso in cui siamo.

$l_1 : x = 0$ $\quad r_1 : x + y = 1$

$l_2 : y = 0$ $\quad r_2 : 2x+y = 0$

$l_3 : x-y=1$ $\quad r_3 : x = 1$

$l_1 \cap l_2 = (0,0) = P$

$l_1 \cap l_3 = (0,-1) = Q$

$l_2 \cap l_3 = (1,0) = R$

$r_1 \cap r_2 = (-1,2) = S$

$r_1 \cap r_3 = (1,0) = T$

$r_2 \cap r_3 = (1,-2) = U$

Ora scriviamo l'affinità che manda P, Q, R in S, T, U

$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{ST} = \begin{pmatrix} 1 & +1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{SU} = \begin{pmatrix} 1+1 \\ -2 \ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

M matrice tale che

$M \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -M^2 \qquad M\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = M^1$

$\quad \shortparallel \qquad\qquad\qquad\qquad \shortparallel$

$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad\qquad\qquad \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Affinità cercata: $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_S \\ y_S \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 2x - 2y - 1 \\ -4x + 2y + 2 \end{pmatrix}$ ecco!

Si consideri ora $\mathbb{A}$ come carta affine in un piano proiettivo $\mathbb{P}$, e siano $\{\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3\}$ e $\{\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3\}$ le chiusure proiettive delle rette della prima terna.

(c) Esiste una proiettività $F$ di $\mathbb{P}$ tale che $F(\bar{l_i}) = \overline{r_i}$ per $i = 1, 2, 3$? È unica?

(d) Si calcolino esplicitmante le possibili $F$ nel caso del punto (b), con $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ carta affine di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ rispetto a $x_0$.

(c) Date le rette nell'ipotesi, abbiamo che le intersezioni stanno tutte in $\mathbb{A}$, e sono punti in posizione generale in $\mathbb{P}$ (si veda l'esercizio precedente). Come nel punto (a), una proiettività $F$ come richiesta manda $P, Q, R$ in $S, T, U$ rispettivamente. Tuttavia, ho molte proiettività nelle condizioni richieste! Fissato un punto $A$ che sia tale che $P, Q, R, A$ siano in posizione generale, $\forall$ $B$ tale che $S, T, U, B$ sono in posizione generale $\exists$ proiettività che manda $P\, Q\, R, A$ in $S, T, U, B$ (con ordine)

Fissato quell' $A$, sia $\{e_0, e_1, e_2\}$ il riferimento proiettivo associato a $P, Q, R, A$, se scrivo le coordinate di $S\ T\ U$ rispetto a questo riferimento,

$$\begin{pmatrix} x_0^S \\ x_1^S \\ x_2^S \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_0^T \\ x_2^T \\ x_2^T \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_0^U \\ x_1^U \\ x_2^U \end{pmatrix}$$

una matrice associata a $F$ è della forma

$$\left( \lambda \begin{pmatrix} x_0^S \\ x_1^S \\ x_2^S \end{pmatrix} \middle| \, \mu \begin{pmatrix} x_0^T \\ x_2^T \\ x_2^T \end{pmatrix} \middle| \, \gamma \begin{pmatrix} x_0^U \\ x_1^U \\ x_2^U \end{pmatrix} \right) \qquad \lambda, \mu, \gamma \in K^*.$$

(d) Nel caso in esame,

$$P = \overline{\ell_1} \cap \overline{\ell_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad Q = \overline{\ell_1} \cap \overline{\ell_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad R = \overline{\ell_2} \cap \overline{\ell_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$S = \overline{r_1} \cap \overline{r_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad T = \overline{r_1} \cap \overline{r_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad U = \overline{r_2} \cap \overline{r_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

una proiettività come richiesto manda $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longmapsto -\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Quindi in generale è associata ad $M = \left( \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ con $\lambda, \mu, \gamma \in \mathbb{R}^*$.

6. Si considerino i seguenti 4 punti in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$:

$$P_0 = [1, 0, -1],\ P_1 = [1, 2, 0],\ P_2 = [-1, -1, 1],\ P_3 = [1, -1, -2];$$

(a) Stabilire se sono in posizione generale.

(b) Si scriva l'equazione della retta $L(P_0, P_1)$.

(c) Esibire, se esiste, un punto $Q$ distinto dai precedenti tale che $P_0, P_1, P_2, Q$ non siano in posizione generale.

(d) Determinare, se esistono, tutte le proiettività $f$ tali che $f([1, 0, 0]) = P_0$, $f([0, 1, 0]) = P_1$, $f([0, 0, 1]) = P_2$ e $f([1, 1, 1]) = P_3$.

(e) Esiste una proiettività che fissa $P_0, P_1, P_2$ e non è l'identità? Se sì, fare un esempio.

(a) verifichiamo prima che $P_0, P_1, P_2$ sono in posizione generale: basta vedere che tre vettori che li rappresentano sono linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^3$, cioè che questo determinante è non nullo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 - 1 = 1 \neq 0 \quad \underline{\text{ok}}$$

Ora basta verificare che $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ si scriva come combinazioni lineare di $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ con coefficienti tutti <u>non nulli</u>:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta + -\gamma \\ 0 + 2\beta - \gamma \\ -\alpha + 0 + \gamma \end{pmatrix}$$

Risolviamo questo sistema

$$\begin{cases} \alpha+\beta-\gamma = 1 \\ 2\beta-\gamma = -1 \\ -\alpha+\gamma = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\beta+3+\beta-2\beta-1 = 1 \\ \gamma = 2\beta+1 \\ \alpha = \gamma+2 = 2\beta+1+2 = 2\beta+3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = -1 \\ \gamma = -1 \\ \alpha = 1 \end{cases} \quad \boxed{\text{OK}}$$

controllo

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ok!

OK i quattro punti sono in posizione generale.

(b) $L(P_0 P_1) = \mathbb{P}\left(\text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right)$

Basta trovare una equazione per questo piano in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2x_0 - x_1 + 2x_2 = 0$$

(c) Certo che esiste un punto $Q$ tale che $P_0 P_1 P_2 Q$ non sono in posizione generale! Basta prendere ad esempio $Q \in L(P_0, P_1) \setminus \{P_0, P_1\}$, ad esempio $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = Q$ va bene.

(d) Esiste un'unica proiettività nelle condizioni richieste, e la matrice associata è (ovviamente a meno di proporzionalità)

$$M = \left( \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

con $\alpha, \beta, \gamma$ coefficienti di $v_3$ come combinazione lineare di $v_0, v_1, v_2$: cioè $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, -1, -1)$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Quindi $f\left(\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_0 - x_1 + x_2 \\ -2x_1 + x_2 \\ -x_0 - x_2 \end{bmatrix}$ questa è la espressione in coordinate di $f$.

(e) Sappiamo che $\forall Q \in \mathbb{P} \setminus (L(P_0,P_1) \cup L(P_0,P_2) \cup L(P_1,P_2))$

$\exists!$ $f$ che fissa $P_0$, $P_1$, $P_2$ e manda $P_3$ in $Q$.

Quindi di certo esistono proiettività diverse da $Id_{\mathbb{P}}$ che fissano $P_0$, $P_1$ e $P_2$. Ora cerchiamo l'espressione esplicita di una di esse.

Ad esempio possiamo fare così: la proiettività che manda $P_0$ $P_1$ $P_2$ e $P_3$ in $[1,0,0]$ $[0,1,0]$ $[0,0,1]$ e $[1,1,1]$ (con ordine) è associata ad $M$ calcolata nel punto precedente:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Possiamo comporla con la proiettività che manda $[1,0,0]$ $[0,1,0]$ $[0,0,1]$ e $[1,1,1]$ in $P_0$, $P_1$, $P_2$ e $Q$ con ordine.

Prendiamo $Q = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ quest'ultima proiettività è associata a

$$N^{-1} \quad \text{dove} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La proiettività cercata è la composizione delle due quindi è associata a $N^{-1} \cdot M$

7. (Fortuna, Frigerio, Pardini, Es 2.11) Siano $r$ e $s$ rette distinte di $\mathbb{P}^3_K$ e sia $f$ una proiettività di $\mathbb{P}^3_K$ tale che $Fix(f) = r \cup s$.

(a) Verificare che $r$ ed $s$ sono sghembe.

(b) Per ogni $P \in \mathbb{P}^3_K \setminus \{r \cup s\}$ si denoti con $l_P$ la retta congiungente $P$ e $f(P)$. Si provi che, per ogni $P \in \mathbb{P}^3_K \setminus \{r \cup s\}$, la retta $l_P$ interseca sia $r$ che $s$.

$r, s \subseteq \mathbb{P}^3_K$ $\quad f \in \mathbb{P}GL(\mathbb{P}^3_K)$ tale che $Fix(f) = r \cup s$

(a) Ricordiamo che $Fix(f)$ è l'unione del proiettivizzato degli autospazi associati a $\varphi$, automorfismo associato ad $f$. Come noto dall'algebra lineare, due autospazi distinti si intersecano solo nel vettore nullo.

Se $Fix(f) = r \cup s$, allora ho che $\exists\, V_\alpha, V_\beta \subseteq \mathbb{R}^4$ autosottospazi di dimensione 2 tali che $r = \mathbb{P}(V_\alpha)$ $s = \mathbb{P}(V_\beta)$ (e siccome sono diversi $\alpha \neq \beta$)

Allora $V_\alpha \cap V_\beta = \{0_V\} \Rightarrow \mathbb{P}(V_\alpha) \cap \mathbb{P}(V_\beta) = \emptyset$.

(b) Dato $P \in \mathbb{P}^3 \setminus \{r \cup s\}$, chiamo $L_P$ la retta $L_P = L(P, f(P))$ (ben definita perché $P \neq f(P)$).

Voglio vedere che $L_P \cap r \neq \emptyset$ e $L_P \cap s \neq \emptyset$

Dal punto precedente sappiamo che $r \cap s = \emptyset$. Inoltre $\varphi$ è diagonalizzabile con autospazi $V_\alpha$ e $V_\beta$. Sia $\{\underbrace{v_1, v_2}_{V_\alpha}, \underbrace{v_3, v_4}_{V_\beta}\}$ una base di $V = K^3$ formata da autovettori

Dato $P = [v]$ $\quad v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \quad \varphi(v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(v_i) =$

$= \lambda_1 \alpha v_1 + \lambda_2 \alpha v_2 +$

$+ \lambda_3 \beta v_3 + \lambda_4 \beta v_4$

Allora $\alpha v - \varphi(v) = \lambda_3 (1-\beta) v_3 + \lambda_4 (1-\beta) v_4 \in V_\beta$

quindi $\operatorname{span}(v, \varphi(v)) \cap V_\beta$ ha dimensione almeno 1

(poichè non sono uguali esattamente uno)

lo stesso per

$\operatorname{span}(v, \varphi(v)) \cap V_\alpha$ : ha dimensione almeno 1

Questo significa che

$$L(P, f(P)) \cap \mathbb{P}(V_\beta) = \mathbb{P}(\operatorname{span}(v, \varphi(v))) \cap \mathbb{P}(V_\beta) =$$

$$= \mathbb{P}(\operatorname{span}(v, \varphi(v)) \cap V_\beta) \neq \emptyset$$

e lo stesso per $L(P, f(P)) = \mathbb{P}(\operatorname{span}(v, \varphi(v)) \cap V_\alpha) \neq \emptyset$

$\boxed{\text{OK}}$