Geometria I

CdL in Matematica
Università di Pavia

Prova scritta telematica del 19 giugno 2020
Giustificare sempre le risposte.

1. *[15 punti]* Si consideri la seguente conica affine reale in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$:

$$\mathcal{C}\colon xy - x + y - 2 = 0.$$

   (a) La si classifichi dal punto di vista affine (scrivendo l'equazione canonica). Se è a centro trovare le coordinate del centro.

   (b) La si classifichi dal punto di vista euclideo, esplicitando il cambio di coordinate cartesiane che la porta in forma canonica.

   (c) Identifichiamo $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ con la carta affine $\mathcal{U}_0 = \{x_0 \neq 0\}$ di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$. Si scriva l'equazione della chiusura proiettiva $\overline{\mathcal{C}}$ di $\mathcal{C}$. La si classifichi dal punto di vista proiettivo (scrivendo l'equazione canonica).

   (d) Confrontare dal punto di vista insiemistico *supp* $\overline{\mathcal{C}}$ e *supp* $\mathcal{C}$ (cioè: abbiamo aggiunto punti all'infinito? Se sì, quali?).

   (e) Consideriamo la topologia euclidea su $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ e la topologia indotta dalla euclidea su $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$. Si stabilisca se i supporti *supp* $\overline{\mathcal{C}}$ e *supp* $\mathcal{C}$ sono connessi e/o compatti.

2. *[16 punti]* Si consideri la seguente famiglia sull'insieme $X = \{a, b, c, d\}$.

$$\mathcal{T} := \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

   (a) Verificare che è una topologia su X.

   (b) Di quali proprietà di separabilità (T_i) gode questa topologia?

   (c) $(X, \mathcal{T})$ è connesso? È compatto?

   (d) Trovare la chiusura e la parte interna dei sottoinsiemi $S := \{a, b\}$, $T := \{d\}$.

   (e) Esiste un'applicazione iniettiva e continua tra $(X, \mathcal{T})$ e $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$?

① $\mathcal{C}: xy - x + y - 2 = 0$ in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$

(a) Classificarla dal punto di vista affine. La matrice associata a $\mathcal{C}$ (A 3x3 tale che $(1, x, y)\, A \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$ è equazione di $\mathcal{C}$)

è $A = \begin{pmatrix} -2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ Considero $\boxed{2A}$ per comodità e la chiamo ancora A

$A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ A' associata alla parte omogenea di grado 2 è $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\det A' = -1 < 0$

$\det A = 2 \neq 0$ quindi $\mathcal{C}$ è iperbole non degenere

Equazione canonica affine $\boxed{x'^2 - y'^2 = 1}$

È a centro: il centro si trova col sistema

$\begin{cases} -1 + y = 0 \\ 1 + x = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

(b) Diagonalizzo A': autovalori ± 1 $V_1 = \text{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $V_{-1} = \text{span}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Considero il cambiamento di coordinate $\begin{cases} x = \dfrac{x' - y'}{\sqrt{2}} \\ y = \dfrac{x' + y'}{\sqrt{2}} \end{cases}$

ottengo equazione

$$\mathcal{C}: (x')^2 - (y')^2 - \left(\frac{x' - y'}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{x' + y'}{\sqrt{2}}\right) - 2 = 0$$

$$(x')^2 - (y')^2 + \sqrt{2}\, y' - 2 = 0$$

Ora completo i quadrati:

$$(x')^2 - \left(y' - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = x'^2 - y'^2 + \sqrt{2}\, y' - \frac{2}{4}$$

Con il cambio

$\begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ ottengo $\mathcal{C}: (x'')^2 - (y'')^2 - 2 + \frac{1}{2} = 0$

ottengo equazione canonica euclidea $= 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$$\boxed{\frac{(x'')^2}{\sqrt{3/2}} + \frac{(y'')^2}{\sqrt{3/2}} = 1}$$

Quindi il cambiamento di coordinate richiesto è:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x'-y'}{\sqrt{2}} = \dfrac{x''-y''+\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}} = \dfrac{x''-y''}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2} \\ y = \dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}} = \dfrac{x''+y''-\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}} = \dfrac{x''+y''}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2} \end{cases}$$

(c) $\overline{\mathcal{C}}: -2x_0^2 + x_1x_2 - x_0x_1 + x_0x_2 = 0$ in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$

La matrice associata è sempre A

$\det A \neq 0 \Rightarrow \overline{\mathcal{C}}$ è conica non degenere

$\operatorname{supp} \mathcal{C} \subseteq \operatorname{supp} \overline{\mathcal{C}} \Rightarrow \overline{\mathcal{C}}$ è a punti reali.

Equazione canonica proiettiva

$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$

(d) Punti all'infinito di $\mathcal{C}$: $\operatorname{supp} \overline{\mathcal{C}} \cap \{x_0 = 0\}$

$$\begin{cases} -2x_0^2 + x_1x_2 - x_0x_1 + x_0x_2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1x_2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \begin{matrix} \nearrow [0,1,0] \\ \searrow [0,0,1] \end{matrix}$$

$\operatorname{supp} \mathcal{C} \cap \{x_0 = 0\} = \{[0,1,0], [0,0,1]\}$ ho aggiunto questi due punti all'infinito.

(e) $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ con la topologia euclidea è $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_e)$.

$\operatorname{supp} \mathcal{C}$ è omeomorfo a $\operatorname{supp} \mathcal{Y}$ con $\mathcal{Y}: x^2 - y^2 - 1 = 0$ iperbole canonica affine (questo perchè una affinità induce un omeomorfismo sui supporti della curva e della sua trasformata). Supp $\mathcal{Y}$ ha due componenti connesse omeomorfe ad $\mathbb{R}$.

Quindi $\operatorname{supp} \mathcal{C}$ non è connesso.

Inoltre supp $\mathscr{G}$ non è limitato, quindi per Heine-Borel non è compatto.
Invece supp $(\overline{\mathscr{E}})$ è un chiuso in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ che è compatto, quindi supp $(\overline{\mathscr{E}})$ è compatto. Inoltre, i punti all'infinito che stanno in supp $(\overline{\mathscr{E}})$ sono entrambi di aderenza per le componenti connesse di supp $(\mathscr{E})$, quindi supp $(\overline{\mathscr{E}})$ è unione di connessi con intersezione non vuota, quindi è connesso.
Alternativamente, si può dimostrare come fatto nell'ultimo tutorato che supp $(\overline{\mathscr{E}})$ è omeomorfo a $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \simeq S^1$ e quindi dedurne connessione e compattezza.

② (a) Poiché $|X| = 4 < +\infty$, basta verificare

Ⓘ $X \in \tau$ $\emptyset \in \tau$ ok per definizione

Ⓘⓘ $\forall\, \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \tau \Rightarrow \mathcal{U} \cup \mathcal{V} \in \tau$

osservo che gli aperti di τ soddisfano queste inclusioni

$$\emptyset \subsetneq \{a\} \subsetneq \{a,b\} \subsetneq \{a,b,c\} \subsetneq X$$
$$\subsetneq \{a,c\} \subsetneq$$

Quindi l'unica verifica non banale è $\{a,b\} \cup \{a,c\} = \{a,b,c\} \in \tau$ ok

Ⓘⓘⓘ $\forall\, \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \tau \Rightarrow \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \in \tau$ - stessa osservazione di prima:

unica verifica: $\{a,b\} \cap \{a,c\} = \{a\} \in \tau$ ok

(b) T0: $\forall\, x, y \in X$ con $x \neq y$ $\exists ?\ \mathcal{U} \in \tau$ tc $x \in \mathcal{U}$ e $y \notin \mathcal{U}$

oppure

$\exists ?\ \mathcal{V} \in \tau$ tc $x \notin \mathcal{V}$ e $y \in \mathcal{V}$

Se $x = a$ $\mathcal{U} = \{a\}$ va bene per qualunque $y \neq a$

Se $x = b$ e $y \in \{c, d\}$ posso prendere $\mathcal{U} = \{a,b\}$ che va bene

se $x = c$ e $y = d$ posso prendere $\mathcal{U} = \{a,b,c\}$

Quindi sì: (X, τ) è T0.

T1 $\Leftrightarrow$ i punti di (X, τ) sono chiusi. ora, $\{a\}$ non è chiuso per τ, perché $X \setminus \{a\} \notin \tau$. Quindi (X, τ) non è T1.

Poiché T2 $\Rightarrow$ T1, (X, τ) non è T2.

T3: $\forall\, C \subseteq X$ chiuso $\forall\, x \notin C$ $\exists$ aperti che li separano.

Se prendo $\{d\} = C$ l'unico aperto che contiene d è X, quindi non posso separare C e $x \notin C$: (X, τ) non è T3

Invece osservo che

$\mathcal{C} = \{$chiusi per $\tau\} = \{\emptyset, X, \{b,c,d\}, \{c,d\}\ \{b,d\}, \{d\}\}$

Ogni chiuso contiene d $\Rightarrow$ non esistono chiusi disgiunti
Quindi (X, τ) è T_4.

(c) Per le osservazioni fatte prima, confrontando τ con $\mathcal{C}$, vedo subito che non esistono aperti e chiusi propri: (X, τ) è connesso.
Inoltre $P(X)$ è esso stesso finito (di cardinalità $2^4=16$) quindi ogni ricoprimento (anche non aperto) di X è finito $\Rightarrow$ (X, τ) è compatto.

(d) $S = \{a, b\}$

$$\mathring{S} = \bigcup_{\substack{A \in \tau \\ A \subseteq S}} A = \{a, b\} = S \text{ (infatti } S \text{ è aperto)}$$

$$\overline{S} = \bigcap_{\substack{C \supseteq S \\ C \text{ chiuso}}} C = X$$

$T = \{d\}$ $\quad \mathring{T} = \emptyset \quad \overline{T} = \{d\} = T$
(infatti T è chiuso)

(e) Non esiste. Se esistesse,

$$f : (X, \tau) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_e) \text{ continua e iniettiva}$$

$f(X)$ sono tre punti in τ_e, quindi $\tau_e|_{f(X)} = \mathcal{D}_{f(X)}$
ora, f darebbe applicazione biiettiva e continua da (X, τ) a $(f(X), \mathcal{D}_{f(X)})$. Quindi questa applicazione sarebbe aperta (in arrivo ho la top. discreta) $\Rightarrow$ sarebbe un omeomorfismo, ma $\tau \subsetneq \mathcal{D}_X$, assurdo.