

Attenzione, in questo primo foglio nella settimana del 4 maggio non avremo ancora fatto gli spazi di Hausdorff o T_2 .

Topologia- ESERCIZI 1

L. Stoppino, corso di Geometria 1,
Università di Pavia, a.a. 2019/20

1. Stabilire quali di questi insiemi sono aperti rispetto alla metrica euclidea su $\mathbb{R}^2$:

- (a) $A := \{(x_1, x_2) \mid x_1 = 2x_2\}$;
- (b) $B := \{(x_1, x_2) \mid x_1 x_2 \neq 0\}$;
- (c) $C := \{(x_1, x_2) \mid x_1 < 0\}$;
- (d) $D := \{(x_1, x_2) \mid x_1 \leq 0\}$.

2. Stabilire quali di questi insiemi sono aperti rispetto alla metrica euclidea su $\mathbb{R}^3$:

- (a) $A := \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 \in \mathbb{Q}\}$; (no) — neanche chiuso
- (b) $B := \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 < 2\}$; (sì) non è chiuso
- (c) $C := \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 1\}$; (sì) non è chiuso
- (d) $D := \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_3 \leq 0\}$. (no) è chiuso.

3. Definiamo seguenti funzioni $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

- $d(\underline{x}, \underline{y}) := \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$;
- $d'(\underline{x}, \underline{y}) := \max_i \{|x_i - y_i|\}$;
- $d''(\underline{x}, \underline{y}) := \min\{d_e(\underline{x}, \underline{y}), 1\}$.

- (a) Dimostrare che sono delle metriche su $\mathbb{R}^n$;
- (b) Disegnare le bolle aperte in $\mathbb{R}^2$;
- (c) Stabilire se le metriche d e d' e d'' sono equivalenti alla metrica euclidea d_e su $\mathbb{R}^n$.

4. Data una metrica d su un insieme non vuoto X , si consideri l'applicazione $\bar{d}: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ così definita:

$$\bar{d}(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}.$$

- (a) Dimostrare che $\bar{d}$ è una metrica su X ;
- (b) dimostrare che d e $\bar{d}$ sono metriche topologicamente equivalenti (cioè inducono la stessa topologia);
- (c) si consideri il caso di $X = \mathbb{R}^n$ e $d = d_e$. In questo caso d e $\bar{d}$ sono metriche equivalenti?

5. Sia (X, d) uno spazio metrico. Dimostrare che per ogni $x_0 \in X$ e per ogni $r > 0$ l'insieme $D_r := \{x \in X \mid d(x, x_0) \leq r\}$ è un chiuso in X .

Basta prendere un $x \notin D_r$: allora vale $d(x, x_0) > r$. Ora bisogna trovare un $\varepsilon > 0$ tale che $\forall z \in B_\varepsilon(x)$, $d(z, x_0) > r$, usando la disuguaglianza triangolare...

6. Dimostrare che un'applicazione lineare $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è continua rispetto alla metrica euclidea su dominio e codominio. (dimostrazione sul Sereno 2)
7. (Ser2, Cap1, Sez1) Sia (X, d) uno spazio metrico, sia $x_0 \in X$ un punto fissato. Consideriamo l'applicazione $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) := d(x, x_0)$. Dimostrare che f è continua (con su $\mathbb{R}$ la metrica euclidea).
8. (Ser2, Cap1, Sez1) Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici, sia $x_0 \in X$ e sia $f: X \rightarrow Y$ un'applicazione tale che esiste $M > 0$ tale che $d_Y(f(x), f(x_0)) \leq M d_X(x, x_0)$ per ogni $x \in X$. Dimostrare che f è continua in x_0 . (questa è la generalizzazione della Lipschitzianità)
9. (Ser2, Cap1, Sez1) Siano d_1 e d_2 metriche su uno stesso insieme X . Dimostrare che l'identità $id_X: (X, d_1) \rightarrow (X, d_2)$ è un omeomorfismo se e solo se d_1 e d_2 sono topologicamente equivalenti.
10. Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici, una isometria è un'applicazione $f: X \rightarrow Y$ tale che per ogni $x, x' \in X$ vale che $d_X(x, x') = d_Y(f(x), f(x'))$. Dimostrare che una isometria tra due spazi metrici è sempre continua.
11. Sia $f: X \rightarrow Y$ un'applicazione tra spazi metrici, con su X la metrica discreta. Dimostrare che, indipendentemente dalla metrica su Y , f è sempre continua.

12. Sia X l'insieme

$$X = \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continua rispetto alla metrica euclidea}\},$$

Definiamo su $X \times X$ la funzione

$$d(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|, \quad \forall f, g \in X.$$

- (a) Dimostrare che d è ben definita e che è una metrica su X .
- (b) Stabilire se i seguenti sottoinsiemi di X sono aperti e/o chiusi (possono non essere nè l'uno nè l'altro!) rispetto alla metrica d :

$$A := \{f \in X \mid f(0) > 1\};$$

$$B := \{f \in X \mid f(0) = 1\};$$

$$C := \{f \in X \mid f(0) \in \mathbb{Q}\}.$$

fatto a lezione

13. Descrivere tutte le possibili topologie su un insieme con 3 elementi, e confrontarle tra loro.
14. Vero o falso? [se vero spiegate perché, se falso esibite un controesempio]

- (a) In ogni spazio topologico i punti sono sottoinsiemi chiusi.
- (b) Esistono spazi topologici in cui i punti non sono nè chiusi nè aperti.
- (c) Esistono spazi topologici metrizzabili in cui i punti non sono nè chiusi nè aperti.
- (d) Esistono spazi topologici in cui i punti sono sia chiusi sia aperti.

15. Stabilire quali delle seguenti famiglie sono topologie su $\mathbb{R}$ e quali no:

- (a) $\mathcal{F} := \{(-\infty, a], a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}$;
- (b) $\mathcal{G} := \{(a, b), a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$;
- (c) $\mathcal{G} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}$;
- (d) $\mathcal{H} := \{(-c, b), c, b \in \mathbb{R}^{>0} \cup \{+\infty\}\} \cup \{\emptyset\}$.

16. Dimostrare che su un insieme X la topologia cofinita coincide con la topologia discreta se e solo se X ha cardinalità finita.

17. Dimostrare che uno spazio metrizzabile è di Hausdorff.

18. Dimostrare che l'unica topologia metrizzabile su uno spazio finito è la topologia discreta.

19. Sia $B_r(x) \subset \mathbb{R}^n$ la bolla di centro x e raggio r con la metrica euclidea. Stabilire se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ sono una base per la topologia euclidea.

- (a) $\{B_r(x), x \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{Q}^+\}$;
- (b) $\{B_r(x), x \in \mathbb{Q}^n, r > 0\}$;
- (c) $\{B_r(x), x \in \mathbb{R}^n, r \geq 1\}$.

20. Si consideri la metrica euclidea d_e su $\mathbb{R}^n$. Per ogni punto $p \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $r > 0$ sia

$$C_r(p) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d_e(x, p) \leq r\}.$$

- (a) Dimostrare che $C_r(p)$ è la chiusura della palla di raggio r centrata in p .
- (b) Si dica se esiste una topologia su $\mathbb{R}^n$ per la quale la famiglia $\mathcal{C} := \{C_r(p), r > 0, p \in \mathbb{R}^n\}$ è una base.
- (c) Qual'è la topologia generata da $\mathcal{C}$ su $\mathbb{R}^n$?

21. Dimostrare che la topologia indotta da una metrica su un insieme X è la meno fine delle topologie su X per cui le bolle sono aperte.

22. Sia $X = \{2, 3, \dots\}$ l'insieme dei numeri interi maggiori o uguali a 2. Per ogni $n \in X$ definiamo gli insiemi

$$U_n := \{m \in X \mid m \text{ divide } n\}.$$

- (a) Dimostrare che gli U_n , al variare di n in X formano una base per una topologia $\mathcal{T}$ su X .
- (b) Lo spazio topologico $(X, \mathcal{T})$ è T2? I suoi punti sono chiusi?
- (c) Per ogni $n \in X$, descrivere la chiusura di $\{n\}$ in $(X, \mathcal{T})$.

23. Si consideri la seguente famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{T} := \{Y \subseteq \mathbb{R} \mid Y \cap \mathbb{N} = \emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\}.$$

- (a) Si dimostri che $\mathcal{T}$ è una topologia su $\mathbb{R}$;
- (b) stabilire se $\mathcal{T}$ è confrontabile con la topologia euclidea $\mathcal{T}_e$, e/o con la topologia cofinita su $\mathbb{R}$;
- (c) in $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ i punti sono chiusi? È una topologia T2?

24. Consideriamo l'insieme

$$S := \{[a, b), a > b, a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

- fatti a lezione* {
- (a) Dimostrare che S è una base per una topologia, che chiamiamo topologia della retta di Sorgenfrey e indichiamo con il simbolo $\mathcal{T}_S$ (usare il lemma della base).
 - (b) Dimostrare che per ogni $A \in S$ A è sia aperto sia chiuso in $\mathcal{T}_S$, ma che $\mathcal{T}_S$ non è la topologia discreta.
 - (c) Dimostrare che la famiglia di intervalli $\{[a, b), a > b, a, b \in \mathbb{Q}\}$ *non* è una base per la topologia di Sorgenfrey su $\mathbb{R}$.

25. Esercizio 3.5 pag. 41 del Manetti: dimostrazione topologica che esistono infiniti numeri primi.

26. Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico. Chiamiamo un aperto $U \in \mathcal{T}$ *primo* se vale questa proprietà:
Se $W, V \in \mathcal{T}$ sono tali che $W \cap V \subseteq U$, allora $W \subseteq U$ oppure $V \subseteq U$.

- (a) Fare un esempio di uno spazio topologico contenente (almeno) un aperto che non sia primo.
- (b) Se $x \in X$ è chiuso, allora l'aperto $X \setminus \{x\}$ è primo.
- (c) Se X ha la topologia discreta quali sono i suoi aperti primi? E se ha la topologia concreta? E se ha la topologia cofinita?
- (d) Mostrare che se X è T2 gli aperti primi sono esattamente l'insieme $\{X, X \setminus \{x\}, x \in X\}$.

27. Quali delle topologie elencate nell'esercizio 13 sono di Hausdorff (T2)? Quali sono in generale le possibili topologie di Hausdorff su un insieme finito?

1. Stabilire quali di questi insiemi sono aperti rispetto alla metrica euclidea su $\mathbb{R}^2$:

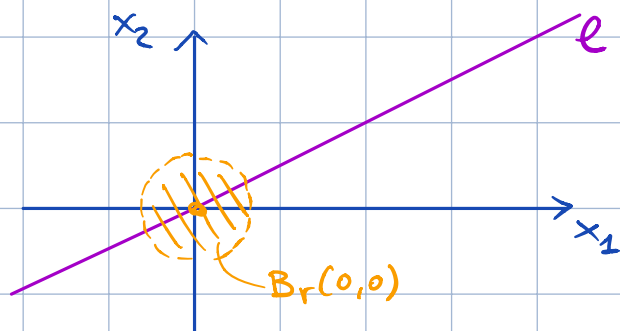
(a) $A := \{(x_1, x_2) \mid x_1 = 2x_2\};$

(b) $B := \{(x_1, x_2) \mid x_1 x_2 \neq 0\};$

(c) $C := \{(x_1, x_2) \mid x_1 < 0\};$

(d) $D := \{(x_1, x_2) \mid x_1 \leq 0\}.$

1) (a) A è la retta in $\mathbb{R}^2$.



Vediamo che non è aperta
rispetto alla metrica euclidea:

Prendo ad esempio $(0,0) \in A$

$$\forall r > 0 \quad B_r(0,0) \not\subset A$$

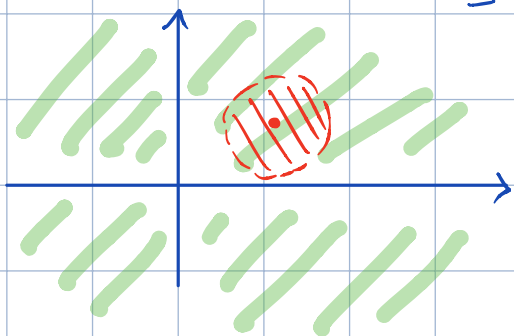
Infatti ad esempio il punto

$$(\frac{r}{2}, 0) \in B_r(0,0) \text{ ma}$$

$$(\frac{r}{2}, 0) \notin A$$

Oss: Si può dimostrare facilmente che A è chiuso in $\mathbb{R}^2$,
ovvero che $\mathbb{R}^2 \setminus A$ è aperto (ma non posso dedurre dal
fatto che A è chiusa il fatto che non è aperto!).

(b) $B = \{x_1 x_2 \neq 0\} \quad B = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 x_2 = 0\} =$
 $= \mathbb{R}^2 \setminus (\{x_1 = 0\} \cup \{x_2 = 0\})$



B è il complementare degli assi.

È aperto: Sia $(x_1, x_2) \in B$

Allora per definizione di B

sia x_1 sia x_2 sono diversi da 0

Sia $x_1 \neq 0$. prendo $r := \min\{|x_1|, |x_2|\}$.

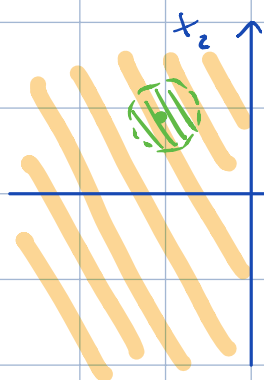
La palla di raggio r centrata in (x_1, x_2) è tutta contenuta
in B : $B_r(x_1, x_2) \subset B$

Infatti: $\forall (z_1, z_2) \in B_r(x_1, x_2)$ ho che

$|z_1 - x_1| < r$ e $|z_2 - x_2| < r$, allora
necessariamente $z_1 \neq 0$ e $z_2 \neq 0$ - OK

(c)

$$C = \{(x_1, x_2) \mid x_1 < 0\}$$



C è aperto: sia $(x_1, x_2) \in C$

allora $x_1 < 0$. Sia $r = |x_1| = -x_1$

$$B_r(x_1, x_2) \subseteq C$$

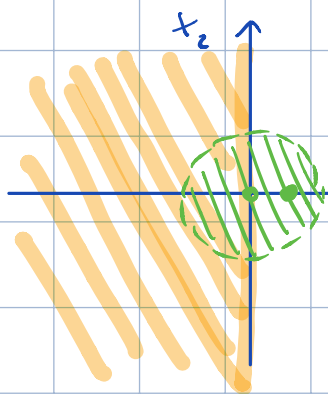
Infatti, se $(z_1, z_2) \in B_r(x_1, x_2)$

in particolare

$$z_1 \in (x_1 - r, x_1 + r)$$

$$\text{cioè } z_1 \in (2x_1, 0) \Rightarrow z_1 < 0.$$

(d) $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \leq 0\}$



D non è aperto:

sia ad esempio $(0, 0) \in D$

$$\forall r > 0 \quad B_r(0, 0) \not\subseteq D$$

Infatti $\forall r > 0$ ad esempio

il punto $(r/2, 0) \in B_r(0, 0)$

$$\text{ma } (r/2, 0) \notin D$$

Oss: $\mathbb{R}^2 \setminus D$ con la stessa verifica del (c) si vede che è
aperto, dunque D è chiuso.

3. Definiamo seguenti funzioni $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

- $d(\underline{x}, \underline{y}) := \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$;
- $d'(\underline{x}, \underline{y}) := \max_i \{|x_i - y_i|\}$;
- $d''(\underline{x}, \underline{y}) := \min\{d_e(\underline{x}, \underline{y}), 1\}$.

- (a) Dimostrare che sono delle metriche su $\mathbb{R}^n$;
(b) Disegnare le bolle aperte in $\mathbb{R}^2$;
(c) Stabilire se le metriche d e d' e d'' sono equivalenti alla metrica euclidea d_e su $\mathbb{R}^n$.

(a) Verifichiamo che d soddisfa le proprietà che definiscono una metrica: Siano $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$

(1) $d(\underline{x}, \underline{y}) \geq 0$? sì, perché $\forall i=1, \dots, n \quad |x_i - y_i| \geq 0$

quindi la somma è ≥ 0 .

Inoltre se $\sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = 0$, allora necessariamente $|x_i - y_i| = 0 \quad \forall i=1, \dots, n$, e dunque $x_i = y_i \quad \forall i=1, \dots, n$, ovvero $\underline{x} = \underline{y}$ (OK)

(2) $d(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^n |y_i - x_i| = d(\underline{y}, \underline{x})$ (OK)

(3) Dati $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{R}^n$ vale la disuguaglianza triangolare?

$d(\underline{x}, \underline{y}) \leq d(\underline{x}, \underline{z}) + d(\underline{z}, \underline{y})$?

||

$$\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

$\forall i=1, \dots, n$ abbiamo $|x_i - y_i| \leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i|$

per la disuguaglianza triangolare su $\mathbb{R}$ con d_e , allora

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| &\leq \sum_{i=1}^n (|x_i - z_i| + |z_i - y_i|) = \\ &= \sum_{i=1}^n |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^n |z_i - y_i| = d(\underline{x}, \underline{z}) + d(\underline{z}, \underline{y}) \end{aligned}$$

(OK)

Per d' vi lascio da fare i conti.

Verifichiamo le tre proprietà per d'' . Dati $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{R}^n$

- (1) $d''(\underline{x}, \underline{y}) \geq 0$ e se $d''(\underline{x}, \underline{y}) = 0$ allora necessariamente $d(\underline{x}, \underline{y}) = 0$ per la definizione di d'' quindi, poiché d è una metrica, $\underline{x} = \underline{y}$ (ok)
- (2) $d''(\underline{x}, \underline{y}) = \min \{d(\underline{x}, \underline{y}), 1\} = \min \{d(\underline{y}, \underline{x}), 1\} = d''(\underline{y}, \underline{x})$ (ok)

- (3) $d''(\underline{x}, \underline{y}) \leq d''(\underline{x}, \underline{z}) + d''(\underline{z}, \underline{y})$? ●

→ supponiamo che

$$d''(\underline{x}, \underline{y}) = d(\underline{x}, \underline{y}) \quad (\text{cioè } d(\underline{x}, \underline{y}) \leq 1)$$

so che vale la triangolare per d :

$$d(\underline{x}, \underline{y}) \leq d(\underline{x}, \underline{z}) + d(\underline{z}, \underline{y})$$

$$\text{quindi se } d''(\underline{x}, \underline{z}) = d(\underline{x}, \underline{z})$$

$$\text{e } d''(\underline{z}, \underline{y}) = d(\underline{z}, \underline{y})$$

allora ci siamo -

$$\text{Se } d''(\underline{x}, \underline{z}) = 1 \quad \text{oppure} \quad d''(\underline{z}, \underline{y}) = 1,$$

allora a maggior ragione ● la disuguaglianza sopra vale.

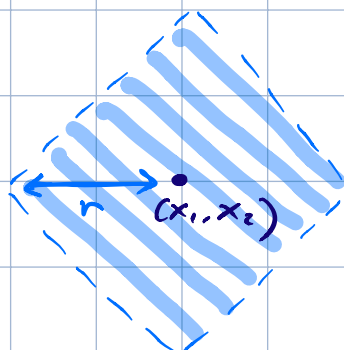
→ supponiamo che $d''(\underline{x}, \underline{y}) = 1$.

Comunque la disuguaglianza ● in qualunque dei tre casi vale.

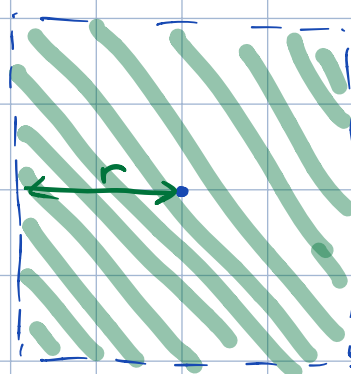
Attenzione: ^{con le stesse identiche verifiche} vale in generale che dato (X, d) spazio metrico, l'applicazione $d''(\underline{x}, \underline{y}) := \min \{1, d(\underline{x}, \underline{y})\}$ è una metrica su X , che di solito si chiama "limitazione standard" di d .

(b) Disegnare le bolle aperte :

$$B_r^d(x_1, x_2)$$

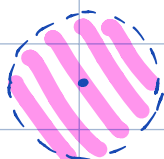


$$B_r^{d'}(x_1, x_2)$$



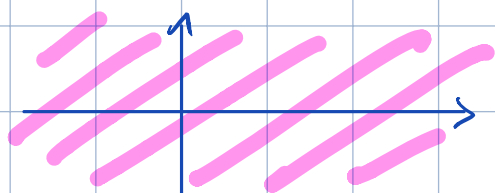
Per le bolle per d'' dobbiamo distinguere due casi:

Se $r \leq 1$ allora $B_r^{d''}(x_1, x_2) = B_r^{de}(x_1, x_2)$



Se $r > 1$ allora $B_r^{d''}(x_1, x_2) = \{ (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } d''((y_1, y_2), (x_1, x_2)) \leq r \} = \mathbb{R}^2$

In questo caso la bolla è tutto $\mathbb{R}^2$!



(c) Ora verifichiamo che d e d' sono equivalenti a d_e su $\mathbb{R}^n$:

$$\forall x, y \quad d(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$
$$d'(x, y) = \max_i \{|x_i - y_i|\}$$
$$d_e(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

vale ovviamente che

$$d_e(x, y) \geq d'(x, y)$$

Quel che

$$(d_e(x, y))^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2$$
$$(d(x, y))^2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \right)^2 \geq d_e(x, y)^2$$

Quindi:

$$d(x, y) \geq d_e(x, y) \geq d'(x, y).$$

D'altra parte osserviamo che ovviamente:

$$n d'(x, y) \geq d(x, y)$$

$$\text{quindi: } n d'(x, y) \geq d(x, y) \geq d'(x, y)$$

per cui d e d' sono equivalenti.

D'altra parte $\forall j \in \{1, \dots, n\}$

$$d'(x, y) = \max_i \{|x_i - y_i|\} \geq |x_j - y_j| = \sqrt{(x_j - y_j)^2}$$

quindi

$$n (d'(x, y))^2 \geq (d_e(x, y))^2$$

$$\text{quindi } \sqrt{n} d'(x, y) \geq d_e(x, y) \geq d'(x, y)$$

quindi d' e d_e sono equivalenti.

Questo mi dice che anche d e d_e sono equivalenti!

Per quanto riguarda d'' , basta osservare che

$\forall r > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ se prendo $r' := \min\{1, r\}$

$$(i) \quad B_r^{d_e}(x) \supseteq B_{r'}^{d''}(x)$$

Viceversa $\forall \varepsilon > 0$ se prendo

$$(ii) \quad B_\varepsilon^{d_e}(x) \subseteq B_\varepsilon^{d''}(x)$$

Allora se U è aperto per $d_e \Rightarrow U$ è aperto per d'' per (i)

Se U è aperto per d'' allora U è aperto per d_e per (ii).

Dunque $\tau_{d_e} = \tau_{d''}$, cioè d_e e d'' sono topologicamente equivalenti.

Pero non sono equivalenti: $\nexists M > 0$ tale che $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$
 $d_e(x, y) \leq M d''(x, y) \quad (*)$

Prendiamo ad esempio $x = \underline{0}$ e $y = (n, 0, \dots, 0)$, $n \in \mathbb{N}^+$
 $d_e(x, y_n) = n$ ma $d''(x, y_n) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$,
quindi non vale (*).

Attenzione: $\forall (X, d)$ spazio metrico d'' limitazione standard è una metrica, e d e d'' sono topologicamente equivalenti. Se (X, d) non è limitato, allora necessariamente d e d'' non sono equivalenti.

4. Data una metrica d su un insieme non vuoto X , si consideri l'applicazione $\bar{d}: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ così definita:

$$\bar{d}(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}.$$

- (a) Dimostrare che $\bar{d}$ è una metrica su X ;
 (b) dimostrare che d e $\bar{d}$ sono metriche topologicamente equivalenti (cioè inducono la stessa topologia);
 (c) si consideri il caso di $X = \mathbb{R}^n$ e $d = d_e$. In questo caso d e $\bar{d}$ sono metriche equivalenti?

(a) positività:

(1) Dati $x, y \in X$ $\bar{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \geq 0$ OK

se $\bar{d}(x, y) = 0$

necessariamente $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$ OK
 $\downarrow$
d metrica

(2) $\bar{d}(x, y) = \bar{d}(y, x)$

" " OK
 $\frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = \frac{d(y, x)}{1 + d(y, x)}$
 $\downarrow$
d metrica

(3) Dati $x, y, z \in X$ so che:

$d(x, y) \geq d(x, z) + d(z, y)$ per la triangolare per d

allora, siccome la funzione

$f(t) = \frac{t}{t+1}$ è crescente per $t \geq 0$
 (basta fare la derivata)

ho che

$f(d(x, y)) \geq f(d(x, z) + d(z, y))$

cioè:

$$\begin{aligned} \frac{d(x, y)}{d(x, y) + 1} &\geq \frac{d(x, z) + d(z, y)}{d(x, z) + d(z, y) + 1} = \\ &= \frac{d(x, z)}{d(x, z) + d(z, y) + 1} + \frac{d(z, y)}{d(x, z) + d(z, y) + 1} \geq \end{aligned}$$

$$\geq \frac{d(x, z)}{d(x, z) + 1} + \frac{d(z, y)}{d(z, y) + 1}$$

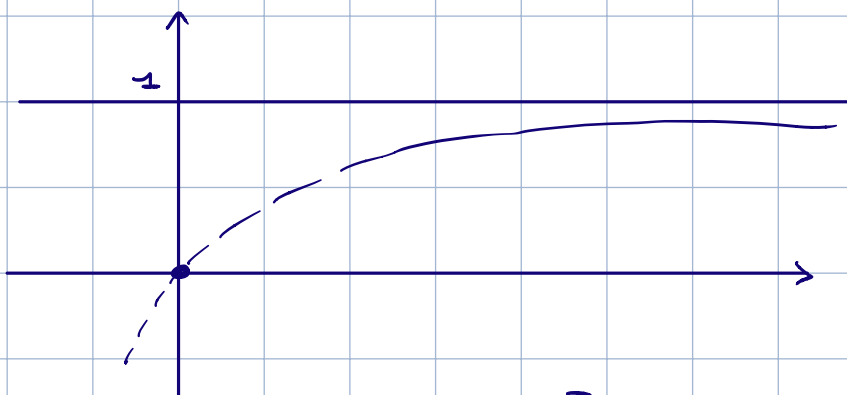
Come volevamo.

(b) Sia $r > 0$ sia $x \in X$

$$B_r^{\bar{d}}(x) = \left\{ y \in X \mid \bar{d}(x, y) < r \right\}$$

" $f(d(x, y))$

Studiamo meglio la funzione $f: \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$



ha un'asintoto
orizzontale per $y=1$
ed è strettamente
crescente.
l'inversa di f è
 $g: [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$
 $g(s) = \frac{s}{1-s}$

allora se $r > 1$ $B_r^{\bar{d}}(x) = X \quad \forall x \in X$

se invece $r \leq 1$ ho che

$$B_r^{\bar{d}}(x) = \left\{ y \in X \mid d(x, y) < g(r) = \frac{r}{1-r} \right\}$$

$$= B_{g(r)}^d(x)$$

Questo confronto tra le bolle ci dice che:

Ogni bolla per $\bar{d}$ la posso ricoprire di bolle rispetto a d

Ogni bolla per d è una bolla per $\bar{d}$.

Quindi $T_{d\bar{d}} = T_d$.

(c) Però $\bar{d}(x, y) \leq 1 \quad \forall x, y \in X$ quindi per gli stessi

ragionamenti dell'esercizio 3, se X non è limitato per d , allora d e $\bar{d}$ non sono equivalenti.

7. (Ser2, Cap1, Sez1) Sia (X, d) uno spazio metrico, sia $x_0 \in X$ un punto fissato. Consideriamo l'applicazione $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) := d(x, x_0)$. Dimostrare che f è continua (con su $\mathbb{R}$ la metrica euclidea).

$$f: X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = d(x, x_0)$$

Verifichiamo che f è continua con $(X, d) \xrightarrow{f} (\mathbb{R}, d_e)$:

Sia $\bar{x} \in X$

Sia $\varepsilon > 0$, voglio trovare $\delta > 0$ tale che

$$d(x, \bar{x}) < \delta \Rightarrow d_e(f(x), f(\bar{x})) < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} d_e(f(x), f(\bar{x})) &= d_e(d(x, x_0), d(\bar{x}, x_0)) = \\ &\quad \downarrow \text{per def. di } f \\ &= |d(x, x_0) - d(\bar{x}, x_0)| \end{aligned}$$

Dimostriamo che in generale dato uno spazio metrico vale che per ogni terna di punti $x, x_0, \bar{x}$

$$|d(x, x_0) - d(x_0, \bar{x})| \leq d(x, \bar{x}) \quad \leftarrow$$

Infatti, la dis. triangolare usata cambiando l'ordine ci dice:

$$d(x, x_0) \leq d(x_0, \bar{x}) + d(x, \bar{x})$$

$$d(x_0, \bar{x}) \leq d(x, x_0) + d(x, \bar{x})$$

Quindi ci vanno.

Ora, prendo dunque $\delta = \varepsilon$ e ho che

$$\text{se } d(x, \bar{x}) < \varepsilon \quad \text{allora } |d(x, x_0) - d(\bar{x}, x_0)| \leq d(x, \bar{x}) < \varepsilon$$

come volevamo.

12. Sia X l'insieme

$$X = \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continua rispetto alla metrica euclidea}\},$$

Definiamo su $X \times X$ la funzione

$$d(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|, \quad \forall f, g \in X.$$

- (a) Dimostrare che d è ben definita e che è una metrica su X .
(b) Stabilire se i seguenti sottoinsiemi di X sono aperti e/o chiusi (possono non essere nè l'uno nè l'altro!) rispetto alla metrica d :

$$A := \{f \in X \mid f(0) > 1\};$$

$$B := \{f \in X \mid f(0) = 1\};$$

$$C := \{f \in X \mid f(0) \in \mathbb{Q}\}.$$

(a) l'estremo superiore di qualunque sottoinsieme ^{non vuoto} di $\mathbb{R}$ è ben definito in $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. l'unica cosa da vedere è quindi che

$$\sup \{|f(x) - g(x)|, x \in [0, 1]\} \text{ non sia } +\infty.$$

Qui usiamo il teorema di Weierstrass (analisi 2) che ci dice che se $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua ammette massimo e minimo: prendo $h(x) := |f(x) - g(x)|$. È continua e quindi ok

Vediamo che quella definita è una metrica:

Siano $f, g \in X$.

(i) $d(f, g) \geq 0$ ok (è sup di un insieme non vuoto)

se $d(f, g) = 0$ allora

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)| = 0 \Rightarrow |f(x) - g(x)| = 0 \quad \forall x \in [0, 1]$$

$$\Rightarrow f(x) = g(x) \quad \forall x \in X, \text{ cioè } f = g \text{ in } X. \quad \underline{\text{ok}}$$

$$(2) \quad d(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)| = \sup_{x \in [0, 1]} |g(x) - f(x)| = d(g, f)$$

$\forall g, f \in X$ OK

(3) Disuguaglianza triangolare:

Date $f, g, h \in X$

$$d(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$$

ora, per la dis. triangolare sui reali abbiamo che

$$\forall x \in [0, 1] \quad |f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|$$

allora, passando al sup la disuguaglianza rimane:

$$\sup_{x \in [0, 1]} (|f(x) - g(x)|) \leq \sup_{x \in [0, 1]} (|f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|)$$

↑

ora questo sup a destra è $\leq$

della somma dei sup

(notate che può essere diverso!)

$$\leq \sup_{x \in [0, 1]} (|f(x) - h(x)|) + \sup_{x \in [0, 1]} (|h(x) - g(x)|)$$

$$= d(f, h) + d(h, g).$$

OK è una metrica, che si chiama metrica della convergenza uniforme, e la incontrerete molte volte!

$$(b) \quad A = \{ f \in X \mid f(0) > 1 \}$$

Vediamo che A è aperto in questa topologia. Basta osservare come sono fatte le bolle aperte:

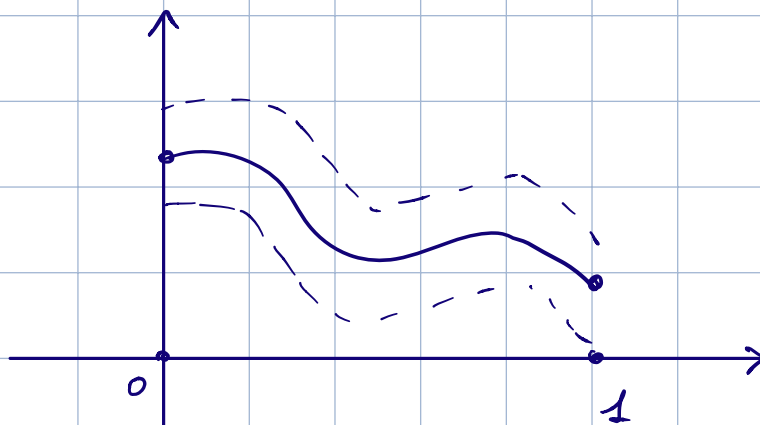
Dato $f \in X$

e dato $\varepsilon > 0$

$$B_\varepsilon(f) = \{g \in X$$

talì che

$$\sup_{x \in [0,1]} |g(x) - f(x)| < \varepsilon \}$$



||

$$\{g \in X \text{ talì che } \forall x \in [0,1] \quad g(x) \in (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)\}$$

Quindi, dato $f \in A$, $f(0) \neq 0$

Dato $\varepsilon < |f(0)|$

$$\forall g \in B_\varepsilon(f) \quad g(0) \in (f(0) - \varepsilon, f(0) + \varepsilon) \neq 0$$

in particolare $g(0) \neq 0$.

A non è chiuso: $X \setminus A = \{f \in X \mid f(0) \geq 0\}$ stessi ragionamenti di B.

$$B = \{f \in X \mid f(0) = 0\}$$

B non è aperto (es: $X \setminus B$ è chiuso, per la stessa dimostrazione di prima)

Sia ad esempio $f \equiv 0$ ovviamente $f \in B$

$\forall \varepsilon > 0$ se prendo δ t.c. $0 < \delta < \varepsilon$

$$f_\varepsilon(x) = \delta \quad f_\varepsilon \equiv \delta$$

$$d(f_\varepsilon, f) = \delta < \varepsilon \quad \text{quindi } f_\varepsilon \in B_\varepsilon(f).$$

$$C = \{f \in X \mid f(0) \in \mathbb{Q}\}$$

Di nuovo C non è aperto, stessi ragionamenti di B.

Stavolta C non è neanche chiuso!

15. Stabilire quali delle seguenti famiglie sono topologie su $\mathbb{R}$ e quali no:

- (a) $\mathcal{F} := \{(-\infty, a], a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}$;
- (b) $\mathcal{G} := \{(a, b), a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$;
- (c) $\mathcal{G} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}$;
- (d) $\mathcal{H} := \{(-c, b), c, b \in \mathbb{R}^{>0} \cup \{+\infty\}\} \cup \{\emptyset\}$.

(a) No: non vale la (2)

Prendo ad esempio $F_n := (-\infty, -\frac{1}{n}]$

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} (-\infty, -\frac{1}{n}] = (-\infty, 0) \notin \mathcal{F}$$

$\mathcal{F}$ non è chiuso rispetto alle unioni arbitrarie.

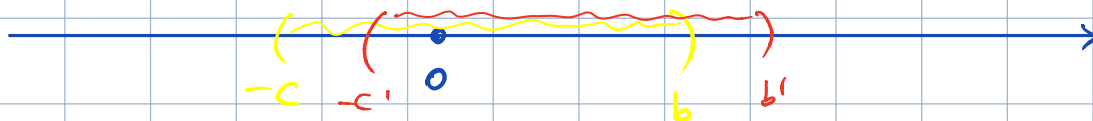
(b) No. Qui non vale nè la (1) nè la (2):

(1) $\mathbb{R} \notin \mathcal{G}, \emptyset \notin \mathcal{G}$

(2) Se prendo ad esempio $(0, 1) \cup (2, 3) \notin \mathcal{G}$

(c) Comunque per quanto osservato sopra la (2) non vale!

(d) $\mathcal{H} = \{(-c, b) \mid c, b \in \mathbb{R}^{>0} \cup \{+\infty\}\} \cup \{\emptyset\}$



(1) $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R} \in \mathcal{H} \quad \emptyset \in \mathcal{H} \quad \underline{\text{OK}}$

(2) Data famiglia $\{(-c_\alpha, b_\alpha)\}_{\alpha \in A} \subseteq \mathcal{H}$

se faccio

$$\bigcup_{\alpha \in A} (-c_\alpha, b_\alpha) = (-\sup c_\alpha, \sup b_\alpha) \in \mathcal{H} \quad \underline{\text{OK}}$$

(3) Dati $(-c, b), (-c', b') \in \mathcal{H}$,

$$(-c, b) \cap (-c', b') = (-\min\{c, c'\}, \min\{b, b'\}) \in \mathcal{H} \quad \underline{\text{OK}}$$

$\mathcal{H}$ è una topologia su $\mathbb{R}$!

23. Si consideri la seguente famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{T} := \{Y \subseteq \mathbb{R} \mid Y \cap \mathbb{N} = \emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\}.$$

- (a) Si dimostri che $\mathcal{T}$ è una topologia su $\mathbb{R}$;
- (b) stabilire se $\mathcal{T}$ è confrontabile con la topologia euclidea $\mathcal{T}_e$, e/o con la topologia cofinita su $\mathbb{R}$;
- (c) in $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ i punti sono chiusi? È una topologia T_2 ?

a) $\frac{\mathbb{R}}{\neq} \cup \in \mathcal{T}$ se e solo se $U \cap \mathbb{N} = \emptyset$ ovvero $U \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$

Verifichiamo che è una topologia:

(1) $\mathbb{R} \in \mathcal{T}$ per ipotesi.

$$\emptyset \in \mathcal{T} \text{ perché } \emptyset \cap \mathbb{N} = \emptyset$$

(2) Sia $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in A}$ famiglia in $\mathcal{T}$. Non è limitativo supporre $\wedge Y_\alpha \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

$$\bigcup_{\alpha \in A} Y_\alpha \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} Y_\alpha \in \mathcal{T} \quad \text{OK}$$

(3) Siano $Y, Z \subseteq \mathbb{R}$ tali che $Y, Z \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

(Se uno dei due è $\mathbb{R}$ la verifica è ovvia)

$$Y \cap Z \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \text{ ovviamente, quindi } Y \cap Z \in \mathcal{T} \quad \text{OK}$$

(b) Se prendo ad esempio $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$, questo punto è aperto per $\mathcal{T}$.
D'altra parte i punti non sono aperti per $\mathcal{T}_e$.

$$\text{Quindi } \mathcal{T} \not\subseteq \mathcal{T}_e$$

Non vale neanche l'altra inclusione però:

$A := (0, 2)$ ad esempio è un aperto di $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$

ma $(0, 2) \cap \mathbb{N} = \{1\}$, quindi A non è aperto per $\mathcal{T}$.

Quindi $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}_e$ non sono confrontabili.

(c) No, i punti non sono chiusi per $\mathcal{T}$: dato $p \in \mathbb{R}$

$(\mathbb{R} \setminus \{p\}) \cap \mathbb{N}$ sicuramente non è vuoto. Dunque nessun punto è chiuso per $\mathcal{T}$.

Attenzione: quest'ultimo punto non guardalo, non abbiamo ancora fatto la proprietà T_2 ?

T non è neanche T_2 : se prendo $1 \in \mathbb{R}$

Sia $U \in \mathcal{T}$ intorno aperto di 1 .

Se guardo gli aperti di T , vedo subito che l'unico aperto che contiene 1 è $\mathbb{R}$. Quindi dato qualunque $x \neq 1$, non esistono $U, V \in \mathcal{T}$ disgiunti tali che $1 \in U$, $x \in V$.