Topologia -ESERCIZI 2

L. Stoppino, corso di Geometria 1
Università di Pavia, a.a. 2019/20

1. Sia X uno spazio topologico. Dimostrare che per ogni sottoinsieme $S \subseteq X$ vale che
$$(X \setminus S)^\circ = X \setminus \overline{S}.$$
(la parte interna del complementare è il complementare della chiusura).

2. Sia X uno spazio topologico. Dimostrare che per ogni coppia di sottoinsiemi A, $B \subseteq X$ vale che:
   (a) $Fr(A \cup B) \subseteq Fr(A) \cup Fr(B)$;
   (b) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$;
   (c) $(A \cup B)^\circ \supseteq A^\circ \cup B^\circ$;
   (d) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
   (e) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$;
   (f) Fare un esempio in cui le inclusioni dei punti (2a), (2c), (2e) sono strette.

3. Consideriamo $\mathbb{R}$ con Siano $E = (0,1), F = [0,1) \subset \mathbb{R}$. Trovare la chiusura, l'interno e la frontiera di E ed F e dell'insieme $\mathbb{N}$ con le seguenti topologie:
   (a) La topologia discreta $\mathcal{D}$;
   (b) la topologia concreta $\mathcal{C}$;
   (c) la topologia cofinita $\mathcal{K}$ (gli aperti propri sono i complementari degli insiemi finiti di punti);
   (d) la topologa euclidea $\mathcal{T}_e$;
   (e) la topologia della semicontinuità superiore $\mathcal{T}_{sup}$;
   (f) la topologia di Sorgenfrey $\mathcal{T}_S$;

4. ([Ser2] Cap. 1 Esempi 3.5 (3)) Sia X uno spazio metrizzabile. Sia d una metrica che induce la topologia. Dimostrare che per ogni $x \in X$, $r > 0$ vale che:
$$\overline{B_r^d(x)} \subseteq \{y \in X \mid d(x,y) \leq r\};$$
$$Fr(B_r^d(x)) \subseteq \{y \in X \mid d(x,y) = r\}.$$
Cercare degli esempi in cui le inclusioni possono essere strette. (suggerimento: metrica discreta su $\mathbb{R}^n$)

5. Stabilire quali siano i sottoinsiemi densi di uno spazio con la topologia cofinita.

6. Sia X un insieme con 4 elementi: $X = \{a, b, c, d\}$. Sia $\mathcal{T}$ la seguente collezione di sottonisiemi:
$$\mathcal{T} = \{\{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}, \{c\}, X, \emptyset\}$$

(a) Verificare che $\mathcal{T}$ è una topologia su X. È metrizzabile?

(b) Trovare la chiusura e la parte interna di $E_1 = \{d\}$, $E_2 = \{a, d\}$, $E_3 = \{a\}$.

(c) Descrivere tutte le funzioni continue da $(X, \mathcal{T})$ in uno spazio con due punti dotato della topologia discreta.

7. Sia $X = \{2, 3, ...\}$ l'insieme dei numeri interi maggiori o uguali a 2. Sia $\mathcal{T}$ la topologia che ha questi insiemi come base (si veda il Foglio di Esercizi 1):

$$U_n := \{m \in X \mid m \text{ divide } n\}.$$

Per ogni $n \in X$, descrivere la chiusura di $\{n\}$ in $(X, \mathcal{T})$.

8. Si consideri la topologia su $\mathbb{R}$ (si veda Esercizi 1):

$$\mathcal{T} := \{Y \subseteq \mathbb{R} \mid Y \cap \mathbb{N} = \emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\}.$$

(a) Qual'è la chiusura di $(0, 1]$ in $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$? Qual'è la sua parte interna?

(b) Sia $S \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme qualsiasi di $\mathbb{R}$. Trovare la chiusura e la parte interna di S in $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

9. Sia $\mathcal{T}_+$ la topologia della semicontinuità superiore su $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{T}_+ := \{(-\infty, a), a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}.$$

Verificare che data una funzione $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono equivalenti:

(a) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq a\}$ è chiuso in $\mathcal{T}_e$.

(b) La funzione f è continua da $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_+)$.

(c) Per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ e per ogni $\epsilon > 0$ vale che esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ $f(x) \geq f(x_0) + \epsilon$.

(d) (solo se avete fatto il lim sup) Per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$, vale che $\limsup_{x \to x_0} \geq f(x_0)$.

(e) Per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$, se $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione che converge ad x_0, vale che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $f(x_n) \geq f(x_0) + \epsilon$ per ogni $n \geq N$.

Ricavare e dimostrare le affermazioni analoghe per la topologia della semicontinuità inferiore $\mathcal{T}_-$:

$$\mathcal{T}_- := \{(a, +\infty), a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}.$$

Dimostrare che una funzione $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua se e solo se è continua da $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_+)$ e d è anche continua da $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_-)$. Tutti questi concetti si estendono a funzioni da (X, d) spazio metrico ad $\mathbb{R}$.

10. Sia $f \colon (X, \mathcal{S}) \longrightarrow (Y, \mathcal{T})$ una funzione tra spazi topologici. (fatto a lezione)

(a) Dimostrare che se f è costante allora f è continua;

(b) Dimostrare che se $\mathcal{T}$ è la topologia concreta allora f è continua;

(c) Dimostrare che se $\mathcal{T}$ è la topologia discreta e $\mathcal{S}$ è la topologia indiscreta allora f è continua se e solo se è costante.

11. Sia X un insieme non vuoto, siano $\mathcal{T}$ e $\mathcal{S}$ due topologie su X. Sia $f\colon X \to X$ l'applicazione identica ($f(x) = x$ per ogni $x \in X$). Dimostrare che: (fatto a lezione)

    (a) $f\colon (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{S})$ è continua se e solo se $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$;

    (b) $f\colon (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{S})$ è aperta se e solo se $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$;

    (c) $f\colon (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{S})$ è chiusa se e solo se $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$;

    (d) $f\colon (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{S})$ è un omeomorfismo se e solo se $\mathcal{T} = \mathcal{S}$.

12. Sia X uno spazio topologico. Dimostrare le seguenti affermazioni:

    (a) Se X ha la proporietà che ogni applicazione da X a qualunque spazio topologico Y è continua, allora X è uno spazio discreto.

    (b) Se X ha la proporietà che per ogni spazio topologico Y ogni applicazione da Y a X è continua, allora X è uno spazio con la topologia concerta.

13. (Topologia indotta da una funzione sul codominio) Sia X uno spazio topologico con topologia $\mathcal{T}$, Y un insieme, e $f\colon X \longrightarrow Y$ un'applicazione. Consideriamo la famiglia di sottoinsiemi di Y

$$f_*\mathcal{T} := \{A \subseteq Y \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{T}\}.$$

    (a) Dimostrare che $f_*\mathcal{T}$ è una topologia su Y.

    (b) Dimostrare che f è continua rispetto a $\mathcal{T}$ su X e $f_*\mathcal{T}$ su Y.

    (c) Dimostrare che $f_*\mathcal{T}$ è la più fine delle topologie su Y che rendono f continua.

14. Vero o falso? [se vero spiegate perché, se falso esibite un controesempio]

    (a) Un'applicazione continua aperta e iniettiva $f\colon X \to Y$ tra due spazi topologici è chiusa.

    (b) Un'applicazione continua aperta e suriettiva $f\colon X \to Y$ tra due spazi topologici è chiusa.

    (c) Un'applicazione continua aperta e biiettiva $f\colon X \to Y$ tra due spazi topologici è chiusa.

15. Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua e $\mathcal{B}$ una base per la topologia di X. Provare che f è aperta se e solo se $f(A)$ è aperto per ogni $A \in \mathcal{B}$. Dimostrare (quindi esibire un controesempio) che l'analoga affermazione non vale per i chiusi: non è vero che se $f(X \setminus A)$ è chiuso per ogni $A \in \mathcal{B}$, allora f è chiusa.

16. Dimostrare che se $f\colon X \longrightarrow Y$ è un'applicazione biiettiva tra spazi topologici, f è aperta se e solo se è chiusa. (fatto a lezione)

17. Fare un esempio di un'applicazione tra spazi topologici che sia: (fatto a lezione)

    (a) aperta e chiusa ma non continua;

    (b) continua e aperta e non chiusa;

(c) continua e chiusa e non aperta.

18. Sia $f\colon X \longrightarrow Y$ un'applicazione aperta tra spazi topologici, e sia $S \subseteq Y$ un sottoinsieme denso. Dimostrare che $f^{-1}(Y)$ è denso in X (sugg: qui serve la "formula di proiezione" (Manetti Prop. 2.2): se in generale $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$ sono sottoinsiemi, vale che $f(f^{-1}(B) \cap A) = B \cap f(A)$). Dimostrare che se togliamo l'ipotesi che f sia aperta l'implicazione non vale necessariamente.

19. Un'applicazione $f\colon X \longrightarrow Y$ si dice un *omeomorfismo locale* se per ogni $x \in X$ esistono due aperti $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$ tali che $x \in A$, $f(A) = B$ e la restrizione $f_{|A}\colon A \longrightarrow B$ è un omeomorfismo.

   (a) Dimostrare che un omeomorfismo è un omeomorfismo locale.

   (b) Il viceversa non è vero: Dimostrare che l'applicazione $e\colon \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ definita da
   $$e(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$
   è un omeomorfismo locale ma non un omeomorfismo.

   (c) Dimostrare che un omeomorfismo locale è un'applicazione aperta.

   (d) Dimostrare che le fibre di un omeomorfismo locale $f\colon X \longrightarrow Y$ sono sottospazi discreti di X.

20. Manetti 3.47: esempio di omeomorfismo locale che non è un'applicazione chiusa.

21. Vero o falso? [se vero spiegate perchè, se falso esibite un controesempio]

   (a) Siano $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ due applicazioni tra spazi topologici. Se nè f nè g sono continue g la loro composizione $g \circ f$ non è continua.

   (b) L'inversa di una applicazione biiettiva non continua non è continua.

   (c) Siano $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ due applicazioni tra spazi topologici. Se f non è continua e g è un omeomorfismo, allora $g \circ f$ non è continua.

22. Sia $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$ la retta reale con la topologia cofinita (in cui gli aperti propri sono i complementari degli insiemi finiti).

   (a) $f(x) = \sin(x)$ è una funzione continua da $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$?

   (b) Le funzioni polinomiali sono continue da $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$?

   (c) Esistono funzioni continue da $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$ che non sono continue da $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$, dove $\mathcal{E}$ è la topologia euclidea su $\mathbb{R}$?

   (d) Esistono funzioni continue da $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$ che non sono continue da $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$?

23. Sia $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ la retta di Sorgenfrey. Siano $f, g\colon (\mathbb{R}, \mathcal{T}_S) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ le funzioni definite ponendo
$$f(x) := \begin{cases} x+1 \text{ se } x \geq 1 \\ x \text{ se } x < 1. \end{cases} \qquad g(x) := \begin{cases} x+1 \text{ se } x > 1 \\ x \text{ se } x \leq 1. \end{cases}$$
Si discuta la continuità di f e di g.

1. Sia X uno spazio topologico. Dimostrare che per ogni sottoinsieme $S \subseteq X$ vale che

$$(X \setminus S)^\circ = X \setminus \overline{S}.$$

(la parte interna del complementare è il complementare della chiusura).

Chiamo $\mathcal{F} = \{ C \subseteq X \mid C \text{ chiuso}, S \subseteq C \}$

$$\overline{S} = \bigcap_{C \in \mathcal{F}} C$$

Allora

$$X \setminus \overline{S} = X \setminus \bigcap_{C \in \mathcal{F}} C = \bigcup_{C \in \mathcal{F}} (X \setminus C) = \circledast$$

ora, osserviamo che

$$\{ X \setminus C, \, C \in \mathcal{F} \} = \{ A \in \tau_X \mid A \subseteq X \setminus S \} =: \mathcal{A}, \text{ quindi}$$

$$\circledast = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = (X \setminus S)^\circ .$$

2. Sia X uno spazio topologico. Dimostrare che per ogni coppia di sottoinsiemi A, $B \subseteq X$ vale che:

(a) $Fr(A \cup B) \subseteq Fr(A) \cup Fr(B)$;
(b) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$;
(c) $(A \cup B)^\circ \supseteq A^\circ \cup B^\circ$;
(d) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
(e) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$;
(f) Fare un esempio in cui le inclusioni dei punti (2a), (2c), (2e) sono strette.

(a) Sia $x \in Fr(A \cup B)$

allora $\forall \mathcal{N}$ intorno di x vale che

$\mathcal{N} \cap (A \cup B) \neq 0$ e $\mathcal{N} \cap (X \setminus A \cup B) \neq \emptyset$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$(\mathcal{N} \cap A) \cup (\mathcal{N} \cap B) \neq \emptyset$ $\mathcal{N} \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ e $\mathcal{N} \cap (X \setminus B) \neq \emptyset$

Allora x appartiene ad almeno uno tra $Fr(A)$ e $Fr(B)$, come volevamo.

(b) Vogliamo vedere che $\mathring{A} \cap \mathring{B} = \overset{\circ}{A \cap B}$.

$\mathring{A} \cap \mathring{B}$ è un aperto, perché $\mathring{A}$ e $\mathring{B}$ sono aperti,

ed è contenuto in $A \cap B$, perché $\mathring{A} \subseteq A$ e $\mathring{B} \subseteq B$.

Allora $\mathring{A} \cap \mathring{B} \subseteq \overset{\circ}{A \cap B}$ per le proprietà di $\overset{\circ}{A \cap B}$.

D'altra parte $\overset{\circ}{A \cap B}$ è un aperto contenuto in A e in B.

Allora $\overset{\circ}{A \cap B} \subseteq \mathring{A}$ e $\overset{\circ}{A \cap B} \subseteq \mathring{B}$, quindi

$\overset{\circ}{A \cap B} \subseteq \mathring{A} \cap \mathring{B}$ come volevamo.

(c) $\mathring{A} \cup \mathring{B}$ è un aperto contenuto in $A \cup B$.

Quindi $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subseteq \overset{\circ}{A \cup B}$

(f) Facciamo ora un esempio in cui le inclusioni (a) e (c) siano strette:

(a) $A = (0,1]$ $\quad B = (1,2)$ in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$

$Fr(A) = \{0,1\}$ $\quad Fr\,B = \{1,2\}$

$Fr(A \cup B) = Fr((0,2)) = \{0,2\} \subsetneq \{0,1,2\} = Fr A \cup Fr B$.

(c) Stesso esempio: $A = (0,1]$ $\quad B = (1,2)$ in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$

$\mathring{A} = (0,1)$ $\quad \mathring{B} = B$

$\mathring{A} \cup \mathring{B} = (0,1) \cup (1,2)$, ma $\widehat{A \cup B}^{\circ} = (0,2]^{\circ} = (0,2)$.

Quindi $\mathring{A} \cup \mathring{B} = (0,2) \setminus \{1\} \subsetneq (0,2) = (A \cup B)^{\circ}$

3. Consideriamo $\mathbb{R}$ con Siano $E = (0,1)$, $F = [0,1) \subset \mathbb{R}$. Trovare la chiusura, l'interno e la frontiera di E ed F e dell'insieme $\mathbb{N}$ con le seguenti topologie:

(a) La topologia discreta $\mathcal{D}$;
(b) la topologia concreta $\mathcal{C}$;
(c) la topologia cofinita $\mathcal{K}$ (gli aperti propri sono i complementari degli insiemi finiti di punti);
(d) la topologa euclidea $\mathcal{T}_e$;
(e) la topologia della semicontinuità superiore $\mathcal{T}_{sup}$;
(f) la topologia di Sorgenfrey $\mathcal{T}_S$;

Ricordiamo che dato $S \subseteq X$

$$\overline{S} = \cap \{ C \ , C \text{ chiuso in } X, \ C \supseteq S \}$$
$$\mathring{S} = \cup \{ A \ , A \text{ aperto in } X \ , A \subseteq S \}$$
$$Fr(S) = \overline{S} \setminus \mathring{S}$$

$E = (0,1) \qquad F = [0,1) \qquad \mathbb{N}$

(a) Nella topologia discreta tutti i sottoinsiemi sono sia aperti sia chiusi $\Rightarrow \overline{E} = \mathring{E} = E \qquad \overline{F} = \mathring{F} = F \qquad \mathring{\mathbb{N}} = \overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$

La frontiera è sempre nulla.

(b) $\mathcal{C}_{\mathbb{R}} = \{ \emptyset , \mathbb{R} \}$ allora dalle definizioni

$$\overline{E} = \mathbb{R} = \overline{F} = \overline{\mathbb{N}}$$
$$\mathring{E} = \emptyset = \mathring{E} = \mathring{\mathbb{N}}$$
$$Fr(E) = \mathbb{R} = Fr(F) = Fr(\mathbb{N})$$

(c) Con $\mathcal{K}$ topologia cofinita $\mathcal{K} = \{ \mathbb{R} \setminus F, \ F \subseteq \mathbb{R} \text{ finito} \} \cup \{ \emptyset \}$

$\overline{E} = \mathbb{R} = \overline{F} = \overline{\mathbb{N}}$ perché tutti questi insiemi sono infiniti.

$\mathring{E} = \emptyset = \mathring{F} = \mathring{\mathbb{N}}$ perché i loro complementari sono infiniti

$$Fr(E) = \mathbb{R} = Fr(F) = Fr(\mathbb{N})$$

(d) Con $\mathcal{T}_e$ $\qquad \overline{E} = [0,1] = \overline{F}$

$\mathbb{N}$ è chiuso per $\mathcal{T}_e$

$\mathring{E} = (0,1) = \mathring{F} \qquad \mathring{\mathbb{N}} = \emptyset$

$Fr(E) = Fr(F) = \{0,1\} \qquad Fr(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$

(e) τ_{sup} è definita così:

$$\tau_{sup} = \{(-\infty, a),\ a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}$$

(dimostrate che è una topologia su $\mathbb{R}$)

Chiusi per τ_{sup}: $\{[a, +\infty),\ a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$

$\overline{E} = [0, +\infty) = \overline{F} = \overline{\mathbb{N}}$

$\mathring{E} = \emptyset = \mathring{F} = \mathring{\mathbb{N}}$

$Fr(E) = Fr(F) = [0, +\infty) = Fr(\mathbb{N})$

$\overline{\mathbb{N}} = [0, +\infty)$

(f) E è aperto per τ_s $\Rightarrow$ $\mathring{E} = E$

F è aperto per τ_s $\Rightarrow$ $\mathring{F} = F$

F è anche chiuso per τ_s $\Rightarrow$ $\overline{F} = F$

E non è chiuso per τ_s e $\overline{E} = F$

$\mathbb{N}$ è chiuso in $\tau_e \subsetneq \tau_s$ $\Rightarrow$ è chiuso in τ_s

Quindi $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$

invece $\mathring{\mathbb{N}} = \emptyset$ perché se A è aperto non vuoto in $\mathbb{N}$

devo avere $[n, n+\varepsilon) \subseteq A$ per qualche $\varepsilon > 0$,

quindi $A \nsubseteq \mathbb{N}$.

6. Sia X un insieme con 4 elementi: $X = \{a, b, c, d\}$. Sia $\mathcal{T}$ la seguente collezione di sottonisiemi:

$$\mathcal{T} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{c\}, X, \emptyset\}$$

(a) Verificare che $\mathcal{T}$ è una topologia su X. È metrizzabile?

(b) Trovare la chiusura e la parte interna di $E_1 = \{d\}$, $E_2 = \{a, d\}$, $E_3 = \{a\}$.

(a) Basta osservare che:

I. $X, \emptyset \in \mathcal{T}$

II. Siccome si tratta di uno spazio finito, basta controllare che le unioni di due elementi di $\mathcal{T}$ siano ancora in $\mathcal{T}$: le uniche verifiche non banali (in cui gli insiemi non sono inclusi l'uno nell'altro) sono:

$\{a\} \cup \{c\} = \{a, c\}$

$\{a, b\} \cup \{a, c\} = \{a, b, c\}$

$\{a, b\} \cup \{c\} = \{a, b, c\}$

III. Di nuovo, prendo due elementi di $\mathcal{T}$ e controllo che l'intersezione sia in $\mathcal{T}$. Le coppie non contenute le une nelle altre sono:

$\{a, b\} \cap \{a, c\} = \{a\}$

$\{a,\} \cap \{c\} = \{a\} \cap \{a, b\} = \emptyset$

L'unica topologia metrizzabile su uno spazio di cardinalità finita è quella discreta, e questa non è la topologia discreta (ad esempio $\{b\} \notin \mathcal{T}$).

(b) $E_1 = \{d\}$ $E_2 = \{a, d\}$ $E_3 = \{a\}$

$$\mathcal{T} = \{\{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}, \{c\}, X, \emptyset\}$$

chiusi di $\mathcal{T} = \{ \{b,c,d\}, \{c,d\}, \{b,d\}, \{d\}, \{a,b,d\}, \emptyset, X \}$

$\overline{E_1} = \{d\}$ $\mathring{E}_1 = \emptyset$

$\overline{E_2} = \{a,b,d\}$ $\mathring{E}_2 = \{a\}$

$\overline{E_3} = \{a,b,d\}$ $\mathring{E}_3 = \{a\}$.

Abbiamo usato semplicemente che la chiusura di un sottoinsieme è il più piccolo chiuso che lo contiene e la parte interna il più grande aperto contenuto in esso.

(c) Descrivere tutte le funzioni continue da $(X, \mathcal{T})$ in uno spazio con due punti dotato della topologia discreta.

Sia $Y = \{x, y\}$ con $\mathcal{D}_Y = \mathcal{P}(Y)$ la topologia discreta

$X = \{a, b, c, d\}$ e $\mathcal{T} = \{\{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}, \{c\}, X, \emptyset\}$

Un'applicazione continua f in Y corrisponde a scegliere due aperti disgiunti in X, A e B, tali che $f(A) = x$ e $f(B) = y$. Non ci sono due aperti del genere non vuoti: le uniche possibilità sono $A = X$ e $B = \emptyset$ o $A = \emptyset$ e $B = X$

le uniche appl continue in Y sono c_x e c_y le costanti in x e in y.

(stiamo usando senza nominarlo il fatto che X non è connesso)

18. Sia $f\colon X \longrightarrow Y$ un'applicazione aperta tra spazi topologici, e sia $S \subseteq Y$ un sottoinsieme denso. Dimostrare che $f^{-1}(Y)$ è denso in X (sugg: qui serve la "formula di proiezione" (Manetti Prop. 2.2): se in generale $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$ sono sottoinsiemi, vale che $f(f^{-1}(B) \cap A) = B \cap f(A)$). Dimostrare che se togliamo l'ipotesi che f sia aperta l'implicazione non vale necessariamente.

Verifichiamo la formula di proiezione $f: X \longrightarrow Y$, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$

$$f(f^{-1}(B) \cap A) = \{ f(x) \mid x \in f^{-1}(B) \text{ e } x \in A \} =$$
$$= \{ f(x) \mid f(x) \in B \text{ e } x \in A \} =$$
$$= \{ y \in Y \mid \exists x \in A \text{ tc } f(x) = y \text{ e } y \in B \}$$

$$B \cap f(A) = \{ y \in Y \mid y \in B \text{ e } \exists x \in \text{ tc } y = f(x) \}$$ ok!

<u>OSS</u> in genere ho queste inclusioni

$f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ → vale = se f è surgettiva

$f^{-1}(f(A)) \supseteq A$ → vale = se f è iniettiva

Sia $S \subseteq Y$ denso: vale che $\forall V$ aperto non vuoto in Y $V \cap S \neq \emptyset$.

Prendo $f^{-1}(S) \subseteq X$. Sia U aperto non vuoto di X allora $f(U)$ è un aperto non vuoto in $Y \Rightarrow$ $f(U) \cap S \neq \emptyset$. Ora, per la formula di proiezione $f(U) \cap S = f(f^{-1}(S) \cap U)$

Quindi deduciamo che $f^{-1}(S) \cap U \neq \emptyset$ come volevam

Controesempio: basta prendere $f: X \longrightarrow Y$ costante e $|Y| > 1$ e $\mathcal{O}_Y$ la topologia concreta su Y.

Qualunque sottoinsieme è denso in Y ma se prendo $y \neq f(X)$ $f^{-1}(y) = \emptyset$ che certo non è denso in X.