

# Geometria I

CdL in Matematica

Università di Pavia

**Prova scritta del 9 luglio 2019**

Giustificare sempre le risposte.

1. [12 punti] Vero o falso? [se vero spiegate perchè, se falso esibite un controesempio]

Siano  $A, B \subseteq X$  due sottospazi di uno spazio topologico  $X$ .

- (a) Se  $A$  e  $B$  sono connessi e  $A \cap B \neq \emptyset$  allora  $A \cup B$  è connesso.
  - (b) Se  $A$  e  $B$  sono connessi e  $A \cap B = \emptyset$  allora  $A \cup B$  non è connesso.
  - (c) Se  $A$  e  $B$  sono connessi non vuoti tali che  $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$  allora  $A \cup B$  non è connesso.
  - (d) Se  $A$  e  $B$  non sono connessi allora  $A \cup B$  non è connesso.
2. [10 punti] Si considerino in  $\mathbb{R}^2$  i seguenti sottospazi:

$$X = \{(x, y) \mid (x^2 + y^2 - 1)(x - 1) = 0\},$$

$$Y = \{(x, y) \mid (x^2 + y^2 - 4)(x - 1) = 0\},$$

$$Z = \{(x, y) \mid (4x^2 + 4y^2 - 1)(x - 1) = 0\}.$$

- (a) Si stabilisca se sono compatti. Si trovino le loro componenti connesse.
- (b) Si suddividano in classi di omeomorfismo.
- (c) Si consideri la contrazione ad un punto del sottospazio di  $Y$

$$W = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4\} \subset Y,$$

$\pi: Y \rightarrow Y/W$ . Stabilire se questo spazio è omeomorfo ad uno degli altri spazi  $(X, Y, Z)$ .

3. [10 punti] Dato un sistema di riferimento cartesiano in un piano euclideo  $\mathbb{E}^2$  si consideri la conica  $\mathcal{C}$  di equazione:

$$\mathcal{C}: 2x^2 + 2xy + 2y^2 + y - 1 = 0.$$

- (a) Classificarla dal punto di vista affine e trovare l'equazione canonica. È una conica a centro? Se sì trovare le coordinate del centro.
- (b) Classificarla dal punto di vista euclideo: trovare la forma canonica e un cambiamento di coordinate cartesiane che la porta in forma canonica.
- (c) Scrivere l'equazione della chiusura proiettiva di  $\mathcal{C}$  in  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ , e trovare, se esistono i punti impropri.