Geometria I

CdL in Matematica
Università di Pavia
Prova scritta telematica del 12 luglio 2021
Giustificare sempre le risposte.

1. *[15 punti]* Si considerino in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ i punti

$$P_0 = [1, 0, 1],\ P_1 = [1, 1, 1],\ P_2 = [1, -2, 0],\ P_3 = [0, 1, 1].$$

   (a) Stabilire se P_0, P_1, P_2, P_3 sono in posizione generale. Si stabilisca la dimensione del sottospazio $L(P_0, P_1)$ e se ne determinino (la/le) equazioni cartesiane.

   (b) Esibire, se esistono, tutte le proiettività che mandano $[1, 0, 0]$ in P_1, $[0, 1, 0]$ in P_2, e $[0, 0, 1]$ in P_3.

   (c) Esiste una proiettività f di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ che ha come luogo fisso $\mathrm{Fix}(f) = \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$? In caso positivo esibirla.

   (d) Sia $\mathcal{U}_0 \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ la carta affine relativa a x_0. Scrivere l'equazione cartesiana di

$$L(P_0, P_1) \cap \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_0 \cong \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$$

   come sottospazio affine di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$.

2. *[17 punti]* Sia $X = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$. Si considerino le seguenti famiglie di sottoinsiemi di X:

$$\mathcal{T} = \{X\} \cup \{\mathcal{V} \subseteq X \mid 0 \notin \mathcal{V}\};$$

$$\mathcal{S} = \{\mathcal{V} \subseteq X \mid 0 \notin \mathcal{V}\} \cup \{\mathcal{V} \subseteq X \mid (-1, 1) \subseteq \mathcal{V}\}.$$

   (a) Verificare che sono delle topologie su X. Confrontarle tra loro e con la topologia euclidea su X.

   (b) Trovare parte interna e chiusura di $S := [-1/4, 1]$.

   (c) Stabilire se $(X, \mathcal{S})$ è T0 e/o T2.

   (d) Sia $f \colon X \to \mathbb{R}$ l'applicazione:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

   Stabilire se f è continua da $(X, \mathcal{S})$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$. È possibile rendere f continua modificando il valore che assume in 0?

   (e) Lo spazio $(X, \mathcal{S})$ è compatto? È connesso?

Soluzioni:

1) I punti sono in posizione generale:

P_0, P_1, P_2 lo sono perché

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$$\begin{array}{ccc} \sqcup & \sqcup & \sqcup \\ v_0 & v_1 & v_2 \end{array}$$

Inoltre, se scrivo $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ come combinazione lineare di v_0, v_1, v_2 ho

$$v_3 = 2v_0 - v_1 - v_2$$

Siccome tutti i coefficienti sono $\neq 0$, sono in posizione generale.

$P_0 \neq P_1$ (poiché v_0 e v_1 non sono proporzionali)

$\Rightarrow L(P_0, P_1)$ è una retta che ha una equazione cartesiana

$ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$

Passaggio da P_0 : $a + c = 0$

" " P_1 : $a + b + c = 0$

$\Big] \longrightarrow \boxed{x_0 - x_2 = 0}$

b) Esistono infinite proiettività che soddisfano le condizioni richieste: le matrici associate a queste proiettività sono della forma:

$$\left(\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \forall \lambda, \mu, \gamma \neq 0$$

c) Non esiste una tale proiettività. Infatti ricordiamo che data f proiettività di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ e $M \in GL_3(\mathbb{R})$ matrice associata ad f, detto S = spettro di f (o di M) vale che
$$\operatorname{Fix}(f) = \bigcup_{\lambda \in S} \mathbb{P}(V_\lambda)$$
dove
V_λ è autospazio associato all'autovalore λ
Quindi se valesse che $\operatorname{Fix}(f) = \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ dovrei avere che M è una matrice 3×3 con 4 autovalori distinti: Assurdo.

d) Considero il passaggio da affini a proiettive

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} & \longrightarrow & U_0 \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \\ \cup\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\shortmid \\ (y_1, y_2) & \longmapsto & [1, y_1, y_2] \end{array}$$

L'equazione affine di $L(P_0, P_1)$ in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ è
$$\boxed{y_2 = 1}$$

2) $\tau = \{X\} \cup \{V \subseteq X \mid 0 \notin V\}$

$\mathcal{S} = \{V \subseteq X \mid 0 \notin V\} \cup \{V \subseteq X \mid (-1,1) \subseteq V\}$

a) τ è topologia:

I) $X \in \tau$ per def. $\emptyset \in \tau$ perché $0 \notin \emptyset$ ok

II) Sia $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq \tau$. Non è limitativo supporre che $0 \notin V_\alpha$ $\forall \alpha \in A$. $\Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha \not\ni 0 \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha \in \tau$ ok

III) Siano $U, V \in \tau$

Non è limitativo supporre che $0 \notin U$ e $0 \notin V$

$\Rightarrow 0 \notin U \cap V \Rightarrow U \cap V \in \tau$ ok

$\mathcal{S}$ è topologia:

I) $X \in \mathcal{S}$ perché $(-1,1) \subseteq X$; $\emptyset \in \mathcal{S}$ perché $0 \notin \emptyset$ ok

II) Sia $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq \mathcal{S}$

$\exists B, C \subseteq A$ tc $B \cup C = A$ e $V_\alpha \not\ni 0$ $\forall \alpha \in B$

e $(-1,1) \subseteq V_\alpha$ $\forall \alpha \in C$

Se $C \neq \emptyset$ allora $\exists \bar{\alpha} \in C$

$\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha \supseteq V_{\bar{\alpha}} \supseteq (-1,1) \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha \in \mathcal{S}$ ok

Se $C = \emptyset$ allora $\forall \alpha \in A$ $0 \notin V_\alpha$

$\Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha \not\ni 0 \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha \in \mathcal{S}$ ok

III) Siano $U, V \in \mathcal{S}$. Se $0 \notin U \vee 0 \notin V \Rightarrow U \cap V \not\ni 0$
$\Rightarrow U \cap V \in \mathcal{S}$

altrimenti $(-1,1) \subseteq U$ e $(-1,1) \subseteq V \Rightarrow (-1,1) \subseteq U \cap V$

$\Rightarrow \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \in \mathcal{S}$ ok

Ovviamente $\boxed{\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}}$, e l'inclusione è stretta. Ad esempio $(-1,1) \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{T}$. Nè $\mathcal{T}$ nè $\mathcal{S}$ sono invece confrontabili con $\mathcal{T}_{e}|_X$: ad esempio

$$(-1,0) \in \mathcal{T}_{e}|_X \setminus \mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}_{e}|_X \setminus \mathcal{T}$$

e $\{1\} \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}_{e}|_X \subseteq \mathcal{S} \setminus \mathcal{T}_{e}|_X$

b) $S = [-\frac{1}{4}, 1] \subseteq X$. Osservo che S non è aperto in $\mathcal{S}$.

$$\mathring{S} = \bigcup \{A \mid A \in \mathcal{S},\ A \subseteq S\}$$

$[-\frac{1}{4}, 0) \cup (0, 1] = S \setminus \{0\} \in \mathcal{S}$

Quindi $\boxed{\mathring{S} = S \setminus \{0\}}$.

$$\overline{S} = \bigcap \{C \mid C \text{ chiuso in } \mathcal{S},\ C \supseteq S\}$$

$$\mathcal{C} = \{\text{chiusi per } \mathcal{S}\} = \{C \subseteq X \mid 0 \in C\} \cup \{C \subseteq X \mid (-1,1) \notin C\}$$

(complementari degli aperti)

Dunque S è chiuso per $\mathcal{S}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\overline{S} = S}$.

c) $(X, \mathcal{S})$ è T_0? sì :

$(X, \mathcal{S})$ è T_0 se $\forall x, y \in X$ con $x \neq y$

vale che $\exists\, \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{S}$ tc $(x \in \mathcal{U} \wedge y \notin \mathcal{U}) \vee (x \notin \mathcal{V} \wedge y \in \mathcal{V})$

Per ogni $x \in X \setminus \{0\}$ $\{x\} \in \mathcal{S}$

Quindi dati $x, y \in X$ con $x \neq y$, almeno uno dei due è diverso da 0, e quindi abbiamo la condizione T_0

$(X, \mathcal{S})$ è T2? NO

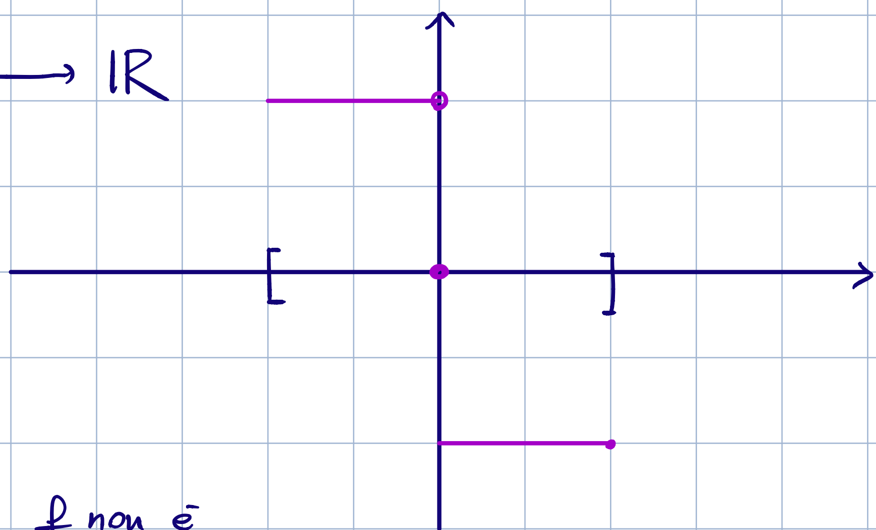
T2: $\forall x, y \in X$ con $x \neq y$ $\exists\, \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{S}$ tc $x \in \mathcal{U}, y \in \mathcal{V}$ e $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$

Se prendo ad esempio $x = 0$ e $y = \frac{1}{2}$

Gli unici aperti di $\mathcal{S}$ che contengono x sono $(-1, 1)$, $(-1, 1]$, $[-1, 1)$, X. Ciascuno di questi insieme contiene anche y $\Rightarrow$ non è T2

d) $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} +1 & se\ x < 0 \\ 0 & se\ x = 0 \\ -1 & se\ x > 0 \end{cases}$$



OSS: ovviamente f non è continua con la topologia euclidea su X, ma non è questa la domanda, e questo non ci dice nulla non essendo $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}_{e|X}$ non confrontabili per (a)

$f: (X, \mathcal{S}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ non è continua: ad esempio se prendo $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in \mathcal{T}_e$ $\quad f^{-1}\left(\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right) = \{0\} \notin \mathcal{S}$

Se considero $f_a: X \longrightarrow \mathbb{R}$ con

$$f_a(x) = \begin{cases} 1 & se\ x < 0 \\ a & se\ x = 0 \\ -1 & se\ x > 0 \end{cases}$$

comunque f_a non è continua:

Sia $a > 0$: prendo $(0, +\infty) \in \mathcal{T}_e$

$f^{-1}(0, +\infty) = [-1, 0] \notin \mathcal{S}$.

Discorso analogo per $a < 0$.

c) $(X, \mathcal{S})$ è compatto? Sì

Sia $\mathcal{A}$ un ricoprimento aperto di $(X, \mathcal{S})$

Poiché $\mathcal{A}$ è un ricoprimento $\exists\, A \in \mathcal{A}$ tale che $0 \in A$. Quindi, per com'è definita $\mathcal{S}$, necessariamente $(-1, 1) \subseteq A$. Ora prendo $A' \in \mathcal{A}$ tc $-1 \in A'$, $A'' \in \mathcal{A}$ tc $1 \in A''$ (che esistono perché $\mathcal{A}$ è un ricoprimento) $\Rightarrow \{A, A', A''\}$ sono un sottoricoprimento finito di $\mathcal{A}$.

$(X, \mathcal{S})$ è connesso? No

Dobbiamo vedere se $\exists$ un sottoinsieme proprio di X sia aperto sia chiuso.

$$\mathcal{C} = \{\text{chiusi di } \mathcal{S}\} = \{C \subseteq X \mid 0 \in C\} \cup \{C \subseteq X \mid (-1,1) \not\subseteq C\}$$

Quindi vediamo subito che $(-1, 1)$ è aperto e chiuso in $(X, \mathcal{S})$.

(ES: trovate le componenti connesse)