

Geometria I

CdL in Matematica

Università di Pavia

Prova scritta telematica del 19 giugno 2020

Giustificare sempre le risposte.

1. [15 punti] Si consideri la seguente conica affine reale in $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$:

$$\mathcal{C}: xy - x + y - 2 = 0.$$

- (a) La si classifichi dal punto di vista affine (scrivendo l'equazione canonica). Se è a centro trovare le coordinate del centro.
- (b) La si classifichi dal punto di vista euclideo, esplicitando il cambio di coordinate cartesiane che la porta in forma canonica.
- (c) Identifichiamo $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ con la carta affine $\mathcal{U}_0 = \{x_0 \neq 0\}$ di $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$. Si scriva l'equazione della chiusura proiettiva $\bar{\mathcal{C}}$ di \mathcal{C} . La si classifichi dal punto di vista proiettivo (scrivendo l'equazione canonica).
- (d) Confrontare dal punto di vista insiemistico $\text{supp}\bar{\mathcal{C}}$ e $\text{supp}\mathcal{C}$ (cioè: abbiamo aggiunto punti all'infinito? Se sì, quali?).
- (e) Consideriamo la topologia euclidea su $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ e la topologia indotta dalla euclidea su $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$. Si stabilisca se i supporti $\text{supp}\mathcal{C}$ e $\text{supp}\bar{\mathcal{C}}$ sono connessi e/o compatti.

2. [15 punti] Si consideri la seguente famiglia sull'insieme $X = \{a, b, c, d\}$.

$$\mathcal{T} := \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

- (a) Verificare che è una topologia su X .
- (b) Di quali proprietà di separabilità (T_i) gode questa topologia?
- (c) (X, \mathcal{T}) è connesso? È compatto?
- (d) Trovare la chiusura e la parte interna dei sottoinsiemi $S := \{a, b\}$, $T := \{d\}$.
- (e) Esiste un'applicazione iniettiva e continua tra (X, \mathcal{T}) e $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$?