

Geometria I
CdL in Matematica
Università di Pavia
Prova scritta del 21 giugno 2019
Giustificare sempre le risposte.

1. Vero o falso? [se vero dimostrarlo o spiegate perché, se falso esibite un controesempio]
 - (a) Un'applicazione biiettiva e aperta tra due spazi topologici è sempre un omeomorfismo. *[2,5 punti]*
 - (b) Un'applicazione biiettiva tra due spazi topologici è aperta se e solo se è chiusa. *[2,5 punti]*
 - (c) Un'applicazione continua da uno spazio topologico compatto ad uno spazio topologico T2 è sempre chiusa. *[2,5 punti]*
 - (d) Un'applicazione continua da uno spazio topologico compatto ad uno spazio topologico T2 è sempre aperta. *[2,5 punti]*
2. Si consideri la seguente famiglia di sottospazi di $\mathbb{R}^2$, con la topologia euclidea, dipendenti da un parametro $a \in \mathbb{R}$:

$$X_a := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2 - a^2)(x^2 + y^2 - 4x + 3) = 0\} \subset \mathbb{R}^2$$

- (a) Stabilire per quali $a \in \mathbb{R}$ lo spazio X_a è compatto, e per quali è connesso. *[3 punti]*
 - (b) Suddividere gli X_a in classi di omeomorfismo al variare di $a \in \mathbb{R}$. *[4 punti]*
 - (c) Sia ora $Y = S^1 / \sim$ lo spazio quoziente ottenuto dalla circonferenza unitaria S^1 tramite la seguente relazione di equivalenza $(x, y) \sim (x', y')$ se e solo se $(x, y) = (x', y')$ oppure $|x| = |x'| = 1$. Stabilire per quali $a \in \mathbb{R}$ lo spazio Y è omeomorfo a X_a . *[3,5 punti]*
3. Si considerino i seguenti 4 punti in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$: $P_0 = [1, 0, 0]$, $P_1 = [1, 1, 0]$, $P_2 = [1, 1, 1]$, $P_3 = [2, 0, 1]$;
 - (a) Verificare se sono in posizione generale (definire un insieme di punti in posizione generale). *[3 punti]*
 - (b) Determinare, se esistono, tutte le proiettività f tali che $f(P_i) = P_i$ Per ogni $i = 0, \dots, 3$. *[2,5 punti]*
 - (c) Determinare, se esistono, tutte le proiettività f tali che $f([1, 0, 0]) = P_0$, $f([0, 1, 0]) = P_1$, $f([0, 0, 1]) = P_2$, $f([1, 1, 1]) = P_3$. *[3 punti]*
 - (d) Scrivere l'equazione della retta r tra P_2 e P_3 . Determinare, se esistono, tutte le proiettività f di $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ che hanno come luogo fisso r e P_0 . *[3 punti]*