Geometria I

CdL in Matematica
Università di Pavia

Prova scritta telematica del 22 gennaio 2021
Giustificare sempre le risposte.

1. *[15 punti]* Si considerino in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ i punti

$$P_0 = [1,1,1],\ P_1 = [1,2,0],\ P_2 = [1,0,2],\ P_3 = [2,2,1].$$

3 (a) Stabilire se P_0, P_1, P_2, P_3 sono in posizione generale. Si calcoli la dimensione del sottospazio L generato da P_0, P_1, P_2 e se ne determinino (la/le) equazioni cartesiane.

4 (b) Esiste una proiettività di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ che manda $[1,0,0]$ in P_1, $[0,1,0]$ in P_2, e $[0,0,1]$ in P_3 e tiene fisso $[1,1,1]$?

4 (c) Esibire, se esistono, tutte le proiettività che mandano $[1,0,0]$ in P_1, $[0,1,0]$ in P_2, e $[0,0,1]$ in P_3.

4 (d) Trovare, se esistono, i punti di intersezione tra il sottospazio $L(P_0, P_1)$ e il supporto della conica di equazione

$$\mathcal{C}\colon x_0^2 + x_0x_1 + x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2.$$

2. *[15 punti]* Si consideri la seguente famiglia di sottoinsiemi dell'insieme $X = \{a, b, c\}$.

$$\mathcal{T} := \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}\,.$$

4 (a) Verificare che è una topologia su X. È T2 (di Hausdorff)? È T4?

4 (b) Lo spazio $(X, \mathcal{T})$ è connesso? È connesso per archi?

4 (c) Esiste un sottospazio di X cardinalità maggiore di 1 con la topologia discreta? E con la concreta?

4 (d) Esiste un'applicazione suriettiva e continua tra $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ e $(X, \mathcal{T})$? In caso positivo, esibirla.

Soluzioni dello scritto telematico di Geometria 1 del 22 gennaio 2021

L. Stoppino

1) $P_0 = [1,1,1]$

$P_1 = [1,2,0]$

$P_2 = [1,0,2]$

$P_3 = [2,2,1]$

a) Prendiamo $L(P_0, P_1)$, la retta tra P_0 e P_1: ha equazione

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2x_0 + x_1 + x_2 = 0$$

vediamo subito che $P_2 \in L(P_0, P_1)$, quindi P_0, P_1, P_2 sono dipendenti, e in particolare i 4 punti non sono in posizione generale.

(Infatti posizione generale in $\mathbb{P}^2$ significa che ogni terna di punti dell'insieme è composta di punti non allineati).

Come visto prima,

$$L(P_0, P_1, P_2) = L(P_0, P_1) = \text{retta di equazione}$$

$$\boxed{2x_0 - x_1 - x_2 = 0}$$

b) Osserviamo che P_1, P_2, P_3 sono in posizione generale, cioè non allineati: infatti $L(P_1, P_2) = L(P_0, P_1)$ e $P_3 \notin L(P_0, P_1)$, poiché $4-2-1 \neq 0$. Ricordiamo il risultato fondamentale sulle proiettività:

Se fisso un altro punto $P \notin L(P_1, P_2) \cup L(P_1, P_3) \cup L(P_2, P_3)$

$\exists!$ proiettività che manda

$$[1,0,0] \longmapsto P_1$$

$$[0,1,0] \longmapsto P_2$$

$$[0,0,1] \longmapsto P_3$$

$$[1,1,1] \longmapsto P$$

D'altra parte una proiettività manda punti in posizione generale in punti in posizione generale.

Ora, $[1,1,1] = P_0$

Quindi non può esistere una proiettività di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ che manda rispettivamente $[1,0,0]$, $[0,1,0]$, $[0,0,1]$ e $[1,1,1]$ in P_0, P_1, P_2, P_3 che non sono in posizione generale.

c) Per quanto appena richiamato, esistono infinite proiettività che soddisfano la richiesta: in effetti ne esistono

$$\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \setminus \{L(P_1,P_2) \cup L(P_1,P_3) \cup L(P_2,P_3)\} =: A$$

Sappiamo che tali proiettività sono associate a matrici di questa forma:

$$\left(\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

con α, β, γ tutti diversi da 0

vale che:

$$P = [\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3]$$

(d) Basta mettere a sistema:

$$\begin{cases} x_0^2 + x_0 x_1 + x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 0 \\ 2x_0 - x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0^2 + x_0 x_1 + (x_1+x_2)^2 = 0 \\ 2x_0 = x_1 + x_2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 + x_0 x_1 + 4x_0^2 = 0 \\ 2x_0 = x_1 + x_2 \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} x_0(5x_0 + x_1) = 0 \\ 2x_0 = x_1 + x_2 \end{cases} \rightarrow \boxed{\{[0,1,-1], [1,-5,5]\}}$$

1) (a) τ è una topologia.

Ⓘ $X, \emptyset \in \tau$ per definizione.

Ⓘⓘ $\forall\, \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \tau \Rightarrow \mathcal{U} \cup \mathcal{V} \in \tau$ Poiché X è finito basta controllare le unioni finite (quindi tra due aperti)

$\forall\, \mathcal{U} \in \tau \quad X \cup \mathcal{U} = X \in \tau \;.\; \forall\, \mathcal{U} \in \tau \quad \emptyset \cup \mathcal{U} = \mathcal{U} \in \tau$

$\{a\} \cup \{b\} = \{a,b\} \in \tau$

$\{a\} \cup \{a,b\} = \{a,b\} \in \tau$ ok

$\{b\} \cup \{a,b\} = \{a,b\} \in \tau$

Ⓘⓘⓘ $\forall\, \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \tau \Rightarrow \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \in \tau$

$\forall\, \mathcal{U} \in \tau \quad \mathcal{U} \cap X = \mathcal{U} \in \tau \;.\; \forall\, \mathcal{U} \in \tau \quad \mathcal{U} \cap \emptyset = \emptyset \in \tau$ ok

$\{a\} \cap \{b\} = \emptyset \in \tau$

$\{a\} \cap \{a,b\} = \{a\} \in \tau$ ok

$\{b\} \cap \{a,b\} = \{b\} \in \tau$

È una topologia.

Vediamo se è T2:

Ricordiamo che T2 significa che

$\forall\, x, y \in X$ con $x \neq y$ $\exists\, \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \tau$ tc $x \in \mathcal{U}, y \in \mathcal{V}$ e $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$

Ora, se io prendo ad esempio $c \in X$

l'unico aperto di X che contiene c è X stesso.

Presi dunque a e c ad esempio, non esistono due aperti

come sopra. $\Rightarrow$ Non è T2.

T4 = $\forall\, C, D \subseteq X$ chiusi non vuoti disgiunti $\exists\, \mathcal{U}, \mathcal{V}$ aperti di X

tali che $C \subseteq \mathcal{U}$, $D \subseteq \mathcal{V}$ e $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$

Guardiamo i chiusi di $(X, \mathcal{T})$:

$$\mathcal{C} = \{ \emptyset, X, \{b,c\}, \{a,c\} \{c\} \}$$

Vediamo subito che non esistono due chiusi non vuoti disgiunti: $(X, \mathcal{T})$ è T4!

b) $(X, \mathcal{T})$ connesso significa che non esistono sottoinsiemi propri di X aperti e chiusi.

Chiusi propri di $X = \{ \{b,c\}, \{a,c\}, \{c\} \}$. Nessuno di questi è aperto. $\Rightarrow$ $(X, \mathcal{T})$ è connesso.

È connesso per archi? Esiste un arco che connette ogni coppia di punti di X? Sì: Se prendo

$\alpha : [0,1] \longrightarrow X$ tc $\alpha([0, \frac{1}{2})) = a$ $\alpha((\frac{1}{2}, 1]) = b$ e

$\alpha(\frac{1}{2}) = c$ vedo subito che α è continuo ed è un cammino tra a e b. Se poi prendo $\beta : [0,1] \longrightarrow X$ così definito:

$\beta([0,1)) = a$ e $\beta(1) = c$, abbiamo che β è un cammino tra a e c. Quindi $\bar{\alpha} * \beta$ dà un cammino tra b e c. $\boxed{OK}$

(c) Ricordiamo che se $Y \subseteq X$ la topologia indotta su Y è $\mathcal{T}_{|Y} = \{ U \cap Y, \ U \in \mathcal{T} \}$

Se prendo $Y = \{a, b\}$

$$\mathcal{T}_{|Y} = \{ \{a\}, \{b\}, \emptyset, \{a,b\} \} = \mathcal{D}_Y$$

Invece, se $Z \subseteq X$ è un sottoinsieme con almeno due elementi, la topologia indotta da $\mathcal{T}$ non è mai quella concreta: Infatti vale necessariamente, siccome $|Z| > 1$, che

$a \in Z \ \vee \ b \in Z \Rightarrow \{a\} \in \mathcal{T}_{|Z} \ \vee \ \{b\} \in \mathcal{T}_{|Z} \Rightarrow$

$\mathcal{T}_{|Z} \neq \mathcal{C}_Z = \{ \emptyset, Z \}$.

(d) Sì, esiste. Basta trovare $A, B \subseteq \mathbb{R}$ aperti disgiunti e porre $f: \mathbb{R} \to X$ con questa definizione:

$$f(x) := \begin{cases} a & \text{se } x \in A \\ b & \text{se } x \in B \\ c & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Poiché $A \cup B \neq \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ è connesso), $\exists\, \bar{x} \in X \setminus (A \cup B)$

$\Rightarrow f(\bar{x}) = c \Rightarrow f$ è suriettiva.

Verifichiamo che f così definita è continua: cioè che $\forall u \in \tau$ $f^{-1}(u) \in \tau_e$

$f^{-1}(a) = A \in \tau_e$, $f^{-1}(b) = B \in \tau_e$, $f^{-1}(\{a,b\}) = A \cup B \in \tau_e$

(e ovviamente $f^{-1}(X) = \mathbb{R} \in \tau_e$ $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau_e$)

A titolo di esempio, possiamo prendere

$A = (-\infty, 0)$ $B = (0, +\infty)$ $A \cup B = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.