Geometria I

CdL in Matematica

Università di Pavia

Prova scritta telematica dell'8 settembre 2020

Giustificare sempre le risposte.

1. *[15 punti]* Si consideri la seguente conica affine reale in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$:

$$\mathcal{C}\colon 2x^2 + 4xy + 5y^2 - 12 = 0.$$

   (a) *[3 punti]* La si classifichi dal punto di vista affine (scrivendo l'equazione canonica). Se è a centro trovare le coordinate del centro.

   (b) *[4 punti]*La si classifichi dal punto di vista euclideo, esplicitando il cambio di coordinate cartesiane che la porta in forma canonica.

   (c) *[3 punti]* Identifichiamo $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ con la carta affine $\mathcal{U}_0 = \{x_0 \neq 0\}$ di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$. Si scriva l'equazione della chiusura proiettiva $\overline{\mathcal{C}}$ di $\mathcal{C}$. La si classifichi dal punto di vista proiettivo (scrivendo l'equazione canonica).

   (d) *[3 punti]* Confrontare dal punto di vista insiemistico *supp*$\,\overline{\mathcal{C}}$ e *supp*$\,\mathcal{C}$ (cioè: abbiamo aggiunto punti all'infinito? Se sì, quali?).

   (e) *[2 punti]*Si consideri ora $\overline{\mathcal{C}}$ come curva complessa in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ e si calcolino i punti all'infinito, sempre rispetto a x_0.

2. *[15 punti]* Sia X uno spazio di cardinalità infinita, e sia $p \in X$ un suo elemento fissato. Si consideri la seguente collezione di sottoinsiemi di X (ricordate che $\vee$ rappresenta il simbolo di oppure non esclusivo):

$$\mathcal{T} := \{A \subseteq X \mid p \notin A \ \vee \ |X \setminus A| < +\infty\} \subseteq \mathcal{P}(X)$$

   (a) *[3 punti]* Dimostrare che $\mathcal{T}$ è una topologia, e confrontarla con le topologie discreta e cofinita su X.

   (b) *[3 punti]*Dato $S \subseteq X$, trovare la sua chiusura $\overline{S}$ (bisognerà distinguere qualche caso). Stabilire se $(X, \mathcal{T})$ è separabile nei due casi: $X = \mathbb{N}$ e $X = \mathbb{R}$.

   (c) *[3 punti]* Stabilire se $(X, \mathcal{T})$ è uno spazio regolare (cioè T1+T3).

   (d) *[3 punti]* Stabilire se $(X, \mathcal{T})$ è connesso. Quali sono le componenti connesse di $(X, \mathcal{T})$?

   (e) *[3 punti]* Stabilire se $(X, \mathcal{T})$ è compatto.