

Geometria I
CdL in Matematica
Università di Pavia
Prova scritta dell'11 giugno 2019
Giustificare sempre le risposte.

1. Definite le nozioni di spazio topologico compatto, metrizzabile, di Hausdorff (o T2). [3 punti]

Vero o falso? [se vero spiegate perchè, se falso esibite un controesempio]

- (a) Un sottospazio chiuso di uno spazio topologico compatto è necessariamente compatto. [3 punti]
- (b) Un sottospazio compatto di uno spazio topologico è necessariamente chiuso. [3 punti]
- (c) Un sottospazio chiuso di uno spazio topologico metrizzabile è necessariamente compatto. [3 punti]

2. Si considerino in $\mathbb{R}^3$ i seguenti sottospazi:

$$X = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = z^2\} \setminus \{(x, y, z) \mid x = z = 0\},$$

$$Y = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \setminus \{(x, y, z) \mid x = z = 0\},$$

$$Z = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

- (a) Si stabilisca se sono connessi, e si trovino le loro componenti connesse. [4 punti]
 - (b) Si suddividano in classi di omeomorfismo. [4 punti]
3. Si considerino i seguenti 4 punti in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$: $P_0 = [2, 1, 0]$, $P_1 = [1, 1, 0]$, $P_2 = [1, 1, -1]$, $P_3 = [2, 1, 1]$;
- (a) Verificare che sono in posizione generale (definire un insieme di punti in posizione generale). [4 punti]
 - (b) Determinare, se esiste, la proiettività f di $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ che soddisfa le condizioni seguenti: $f(P_0) = [1, 0, 0]$, $f(P_1) = [0, 1, 0]$, $f(P_2) = [0, 0, 1]$, $f(P_3) = [1, 1, 1]$. [3 punti]
 - (c) Data la proiettività f del punto precedente, stabilire se ha punti fissi, e, in caso trovare il luogo fisso. [3 punti]