

ESERCIZI 3

L. Stoppino, corso di Geometria 1
Università di Pavia, a.a. 2018/19

1. L'inclusione di un sottospazio S in uno spazio topologico X è aperta (risp. chiusa) se e solo se S è aperto (risp. chiuso).
2. Dimostrare che per ogni $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ il sottospazio (a, b) è omeomorfo ad $\mathbb{R}$. Dimostrare che per ogni $a \in \mathbb{R}$ i sottospazi $(a, +\infty), (-\infty, a)$ sono omeomorfi ad $\mathbb{R}$. Dunque questi sottospazi sono tutti nella stessa classe di omeomorfismo.

Dimostrare che anche i sottospazi $[a, b), (a, b], [a, +\infty), (-\infty, b]$ sono omeomorfi tra loro, e sono omeomorfe a $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$.

3. Dimostrare che due rette in $\mathbb{R}^2$ (con la topologia indotta da quella euclidea) sono sempre omeomorfe tra loro, e sono omeomorfe a $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$.
4. Dimostrare che $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ è omeomorfo a $S^1 \times \mathbb{R}_+$.
5. (Manetti 3.49) Siano $f: X \rightarrow Y$ e $g: Z \rightarrow W$ due applicazioni di spazi topologici e denotiamo

$$f \times g: X \times Z \rightarrow Y \times W$$
$$(f \times g)(x, z) := (f(x), g(z)).$$

- (a) Provare che se f e g sono continue, allora $f \times g$ è continua.
 - (b) Provare che se f e g sono aperte, allora $f \times g$ è aperta.
 - (c) Mostrare con un esempio che se f e g sono chiuse, allora $f \times g$ può non essere chiusa.
6. (Manetti 3.51) Siano X, Y spazi topologici, $A \subseteq X, B \subseteq Y$ sottoinsiemi. Dimostrare che $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$. In particolare se A e B sono chiusi allora $A \times B$ è chiuso nel prodotto.
 7. Sia $Y = \{x, y\}$ un insieme con due elementi. Fare un esempio, se esiste, di una topologia sull'insieme $Y \times Y$ che non sia una topologia prodotto indotta da una topologia su Y .
 8. Sia $F \subseteq \{x > 0, y = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ un insieme (che dotiamo della topologia di sottospazio indotta da quella euclidea su $\mathbb{R}^3$). Sia $R_F \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio che ottengo ruotando F intorno all'asse z ; dimostrare che R_F è omeomorfo a $F \times S^1$.
 9. Indichiamo con $\mathbb{R}_S$ la retta di Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$.
 - (a) Dimostrare che il sottospazio $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S \mid x + y = 0\}$ è discreto.
 - (b) Dimostrare che il sottospazio $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S \mid x - y = 0\}$ è omeomorfo a $\mathbb{R}_S$.
 - (c) Considerando in generale una retta r passante per l'origine, stabilire quando (a seconda della pendenza) r con la topologia indotta è omeomorfo ad $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ e quando è omeomorfo ad $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$.

10. Siano X e Y spazi topologici e sia $f: X \rightarrow Y$ un'applicazione continua suriettiva. Poniamo

$$R = \{(x, x') \mid f(x) = f(x')\} \subseteq X \times X.$$

- (a) Dimostrare che se Y è di Hausdorff R è un chiuso in $X \times X$.
 - (b) Dare un esempio in cui R è un chiuso ma Y non è di Hausdorff.
 - (c) Mostrare che se R è chiuso in $X \times X$ e f è aperta allora Y è di Hausdorff.
11. (a) Dimostrare che un sottospazio di uno spazio T_i è T_i per $i = 0, 1, 2, 3$.
- (b) Dimostrare che un sottospazio chiuso di uno spazio normale è normale.
- (c) Dimostrare che lo stesso non vale per la proprietà T_4 (sugg. provare a prendere topologie opportune su insiemi finiti).
12. Dimostrare che uno spazio topologico X con un numero finito di elementi che sia T_1 ha la topologia discreta. Pertanto è T_2 , T_3 , T_4 .
13. (Esercizio 3.59 del Manetti): Dimostrare che uno spazio topologico è di Hausdorff se e solo se per ogni suo punto x vale

$$\{x\} = \bigcap_{N \in \mathcal{I}(x)} \overline{N}.$$

14. Uno spazio topologico X è T_0 se e solo se punti distinti hanno chiusure distinte.
15. La topologia dell'intervallo annidato (nested interval topology). Sia $X = (0, 1)$ Consideriamo su X la topologia: $\mathcal{T} := \{(0, 1 - 1/n), n \in \mathbb{N}, n \geq 2\} \cup \{\emptyset, X\}$ (verificare che è una topologia). Dimostrare che $(X, \mathcal{T})$ soddisfa l'assioma T_4 ma non il T_0 (né dunque il T_1 e T_2) né il T_3 :
16. (a) Dimostrare che se X e Y sono due spazi T_i allora $X \times Y$ è T_i per $i = 0, 1, 2, 3$.
- (b) Dimostrare che vale anche il viceversa.
17. (a) Dimostrare che se il prodotto di due spazi $X \times Y$ è T_4 , allora sia X sia Y sono T_4 .
- (b) Non vale il viceversa: dimostrare che $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S) \times (\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ non è normale (Munkres pag.198).
18. (a) Dimostrare che X è T_3 se e solo se per ogni $x \in X$ e per ogni intorno V di x esiste un aperto U tale che $x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq V$.
- (b) Dimostrare che X è T_4 se e solo se per ogni chiuso $C \subseteq X$ e per ogni aperto V tale che $C \subseteq V$ esiste un aperto U tale che $C \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq V$.
19. Sia X uno spazio topologico, sia Y un insieme. Sia $f: X \rightarrow Y$ un'applicazione suriettiva. Sia $\mathcal{T}_f$ la topologia quoziente su Y . Dimostrare che $C \subseteq Y$ è chiuso per $\mathcal{T}_f$ se e solo se $f^{-1}(C)$ è chiuso in X .
20. Siano X e Y spazi topologici e sia $p: X \times Y \rightarrow X$ la proiezione naturale. Dire, motivando le risposte, se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- (a) l'applicazione p è aperta;
 - (b) l'applicazione p è chiusa;
 - (c) lo spazio X è omeomorfo al quoziente $X \times Y / \sim$ dove $\sim$ è la relazione di equivalenza $(x, y) \sim (x', y')$ se e solo se $x = x'$.
21. Sia $\mathbb{R}$ la retta reale con la topologia euclidea; si forniscano un sottospazio $Y \subseteq \mathbb{R}$ tale che $\mathbb{R}/Y$ sia di Hausdorff e un esempio di un sottospazio $Z \subseteq \mathbb{R}$ tale che $\mathbb{R}/Z$ non sia di Hausdorff.
22. Siano $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ mappe quozienti. Allora la composizione $g \circ f$ è una mappa quoziente.
23. (Munkres Ch.2, sec.22: esistono applicazioni quoziente aperte e non chiuse, chiuse e non aperte e nè aperte nè chiuse).

- (a) Siano $X := [0, 1] \cup [2, 3] \subset \mathbb{R}$, $Y := [0, 2] \subset \mathbb{R}$ con la topologia indotta da quella euclidea $\mathcal{T}_e$. Definiamo un'applicazione $p: X \rightarrow Y$:

$$p(x) := \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, 1] \\ x - 1 & \text{se } x \in [2, 3] \end{cases}$$

Verificare che p è continua chiusa e suriettiva (dunque è un'identificazione chiusa) ma non aperta.

- (b) Sia $p: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la proiezione sul primo fattore (con topologia euclidea). Verificare che p è un'identificazione aperta ma non chiusa.
- (c) Sia $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ il sottospazio

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \geq 0 \text{ oppure } y = 0 \text{ o entrambi}\}.$$

Dimostrare che $p|_A: A \rightarrow \mathbb{R}$ è una mappa quoziente (un'identificazione) che non è nè aperta nè chiusa.

24. Sia $X = [0, 1]$ con la relazione di equivalenza definita da $x \sim y$ se $x = y$ oppure $\{x, y\} = \{0, 1\}$.
- (a) Dimostrare che $X / \sim$ è omeomorfo a S^1 , e che la proiezione al quoziente $\pi: X \rightarrow X / \sim$ è un'identificazione chiusa.
 - (b) Dimostrare che la restrizione a $[0, 1)$ dell'applicazione $\pi: X \rightarrow X / \sim$ è biettiva e continua ma non è un omeomorfismo di $[0, 1)$ su $X / \sim$ (in altre parole $\pi|_{[0, 1)}$ non è un'identificazione).

25. Dimostrare che uno spazio quoziente di uno spazio X è uno spazio $T1$ se e solo se ogni classe di equivalenza è un sottoinsieme chiuso di X .
26. (La lingua biforcuta). Sia B un insieme con due elementi dotato della topologia discreta. Sullo spazio topologico $X = \mathbb{R} \times B$ definiamo la relazione di equivalenza

$$(x, a) \sim (y, b) \text{ se } (x, a) = (y, b) \text{ oppure se } x = y < 0.$$

Provare che $X / \sim$ è unione di due aperti omeomorfi a $\mathbb{R}$ e che non è di Hausdorff.

27. Dimostrare che la contrazione a un punto di un sottoinsieme di uno spazio topologico $X \rightarrow X/S$ è chiusa/aperta se S è chiuso/aperto in X . Fare dei controesempi all'implicazione inversa (sugg: usare la topologia concreta).
28. Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ il disco chiuso unitario e $S^1 \subset D$ la circonferenza unitaria. Dimostrare che lo spazio D/S^1 in cui S^1 è contratto a un punto è omeomorfo alla sfera S^2 .
29. (a) Dimostrare che uno spazio compatto e T2 è normale;
 (b) Sia X uno spazio normale e $C \subseteq X$ un sottoinsieme chiuso. Dimostrare che lo spazio quoziente X/C è normale.
30. Si dotino $[-1, 1]$ e $S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ delle usuali topologie euclidee e sia $X := [-1, 1] \times S^1$ con la topologia prodotto. Sia poi $Y := \{0\} \times S^1 \subset X$. Sia $\pi: X \rightarrow X/Y$ la contrazione di Y ad un punto. Rispondere -giustificando le risposte- alle seguenti domande.
- (a) Lo spazio X/Y è di Hausdorff?
 (b) Lo spazio X/Y è normale?
 (c) Lo spazio X/Y è metrizzabile?
 (d) Gli spazi X e X/Y sono omeomorfi?
 (e) Stabilire se π è aperta e/o chiusa.
31. Sia T il toro ottenuto come identificazione di figura piana $Q/\sim$ dove $Q = [-1, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ e $(x, y) \sim (x', y')$ se e solo se $(x, y) = (x', y')$ oppure $\{x, x'\} = \{\pm 1\}$ e $y = y'$, oppure $\{y, y'\} = \{\pm 1\}$ e $x = x'$. Dimostrare che $T \sim S^1 \times S^1$.
32. (Manetti, 5.12): esempio di identificazioni il cui prodotto non è una identificazione.
 Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow X$ una identificazione tale che $f(x) = f(y)$ se e solo se $x = y$ oppure $x, y \in \mathbb{Z}$. Denotiamo con $C \subset \mathbb{R} \times \mathbb{Q}$ l'insieme dei punti appartenenti all'unione delle rette di equazioni $x + y = n + \sqrt{2}/n$, al variare di $n \in \mathbb{N}$. Dimostrare che:
- (a) f è una identificazione chiusa;
 (b) C è chiuso ed è saturo rispetto a $f \times Id: \mathbb{R} \times \mathbb{Q} \rightarrow X \times \mathbb{Q}$.
 (c) $(f \times Id)(C)$ non è chiuso nella topologia prodotto;
 (d) $f \times Id$ non è una identificazione.