

### ESERCIZI 3

L. Stoppino, corso di Geometria 1  
Università di Pavia, a.a. 2019/20

1. Sia  $\mathbb{P}$  uno spazio proiettivo di dimensione 3. Dimostrare che tre piani distinti  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  si incontrano sempre in almeno un punto. Generalizzare a  $n$  iperpiani distinti in uno spazio proiettivo di dimensione  $n$ .
2. Dimostrare che dati  $n$  punti  $P_i$  in posizione generale in uno spazio proiettivo  $\mathbb{P}$  di dimensione  $n$  (quindi i punti sono linearmente indipendenti in questo caso). Se consideriamo un riferimento proiettivo in  $\mathbb{P}$  e delle coordinate proiettive per i punti  $P_i = [p_0^i, \dots, p_n^i]$ , verificare che una equazione per  $L(P_1, \dots, P_n)$  la seguente:

$$\begin{vmatrix} x_0 & \dots & x_n \\ p_0^1 & \dots & p_n^1 \\ \dots & & \dots \\ p_0^n & \dots & p_n^n \end{vmatrix} = 0$$

3. Si mostri che i punti del piano proiettivo reale  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$

$$[1, 1, 1], [3, 1, 0], [1, -\frac{1}{3}, -1]$$

sono allineati, e si determini un'equazione della retta che li contiene.

4. Siano  $A, B, C$  tre punti di un piano proiettivo  $\mathbb{P}$  in posizione generale; sia  $r$  una retta che non contenga nessuno dei tre punti. Si dimostri che esiste un'unica proiettività  $f$  di  $\mathbb{P}$  tale che  $f(A) = A, f(B) = C, f(C) = B, f(r) = r$ .
5. Si considerino in  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$  i punti

$$P_1 = [1, 0, 1, 2], P_2 = [0, 1, 1, 1], P_3 = [1, \frac{1}{2}, 1, 1], P_4 = [1, 1, 1, 0].$$

- (a) Si dica se  $P_1, P_2, P_3, P_4$  sono in posizione generale.
  - (b) Si calcoli la dimensione del sottospazio generato da  $L(P_1, P_2, P_3, P_4)$  e se ne determinino equazioni cartesiane.
  - (c) Si completi, se possibile, l'insieme  $\{P_1, P_2, P_3\}$  ad un riferimento proiettivo di  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ .
6. Determinare le coordinate omogenee del punto comune alle chiusure proiettive di ciascuna delle seguenti coppie di rette di  $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ :
    - (a)  $3x_0 - 4x_1 + x_2 = 2x_1 - x_2 + ix_0 = 0$ ;
    - (b)  $ix_0 + 2ix_2 - x_2 = (1 - i)x_0 + 2x_2 = 0$ .
  7. Siano  $A, B, C, D$  punti di  $\mathbb{P}_K^2$  in posizione generale e siano  $P = L(A, B) \cap L(C, D), Q = L(A, C) \cap L(B, D), R = L(A, D) \cap L(B, C)$ . Si mostri che  $P, Q, R$  non sono allineati.

8. (ref: Fortuna, Frigerio, Pardini Es. 2.10) Siano  $r_1, r_2, r_3$  rette di  $\mathbb{P}_K^4$  a due a due sghembe e non tutte contenute in un iperpiano. Si dimostri che esiste un'unica retta che interseca sia  $r_1$ , sia  $r_2$ , sia  $r_3$ .
9. (ref: Fortuna, Frigerio, Pardini Es. 2.12) Siano  $r, r' \subset \mathbb{P}_K^3$  due rette sghembe e sia  $P \in \mathbb{P}_K^3 \setminus (r \cup r')$ . Si dimostri che esiste un'unica retta  $l \subset \mathbb{P}_K^3$  che contiene  $P$  e che interseca sia  $r$  sia  $r'$ . Si determinino equazioni cartesiane per  $l$  nel caso in cui  $K = \mathbb{R}$ ,  $P = [0, 1, 0, 1]$ , e le rette  $r$  ed  $r'$  abbiano equazioni rispettivamente:

$$r : x_0 + x_2 + x_3 = 2x_0 + x_1 = 0, \quad r' : 2x_1 - 3x_2 - x_3 = x_0 + x_3 = 0.$$

10. Consideriamo la carta affine  $\mathbb{P}_K^n \setminus H_0 \xrightarrow{j_0} \mathbb{A}_K^n$ .
- (a) Dimostrare che se  $P_0, \dots, P_k$  sono punti affinemente indipendenti di  $\mathbb{A}_K^n$ , allora i  $P'_i := j_0^{-1}(P_i)$  sono punti linearmente indipendenti di  $\mathbb{P}_K^n$ .
- (b) Dimostrare che se  $Q_0, \dots, Q_k$  sono punti linearmente indipendenti di  $\mathbb{P}_K^n$  che non appartengono a  $H_0$ , allora  $j_0(Q_i)$  sono punti affinemente indipendenti di  $\mathbb{A}_K^n$ .
11. (Sernesi Geo1 Es. 27.1) Determinare la formula del cambiamento di coordinate dal riferimento standard di  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  al riferimento individuato dalle seguenti quaterne ordinate di punti:

(a)  $P_0 = [1, 1, -1], P_1 = [2, 1, 0], P_2 = [0, 1, 1], M = [1, 1, 0];$

(b)  $P_0 = [1, -1, 0], P_1 = [0, 1, 1], P_2 = [2, 0, 1], M = [1, 2, 2];$

(c)  $P_0 = [1, 1, 1], P_1 = [1, 0, 1], P_2 = [1, \frac{1}{2}, 0], M = [4, 2, 2].$

12. (Senersi Geo 1, Es.27.2) Determinare la proiettività di  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$  che soddisfa le condizioni seguenti:  $f([1, 1]) = [1, -1], f([2, 0]) = [1, 1], f([1, -1]) = [2, 1].$
13. (Senersi Geo 1, Es.27.3) Determinare la proiettività di  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  che soddisfa le condizioni seguenti:

$$f(r) = r', \quad f(s) = s', \quad f([1, 2, 1]) = [1, 1, 1], \text{ dove}$$

$$r : x_0 - x_1 = 0, \quad r' : x_0 + x_1 = 0, \quad s : x_0 + x_1 + x_2 = 0, \quad s' : x_1 + x_2 = 0.$$

14. (ref: Fortuna, Frigerio, Pardini Es. 2.14) Siano  $A, A', B, B'$  quattro punti distinti di  $\mathbb{P} = \mathbb{P}_K^2$  non tutti allineati. Si dimostri che  $A, A', B, B'$  sono in posizione generale se e solo se esiste una proiettività  $f: \mathbb{P}_K^2 \rightarrow \mathbb{P}_K^2$  tale che  $f(A) = B, f(A') = B', f^2 = f \circ f = Id_{\mathbb{P}}$ .
15. Se  $f$  è una proiettività di uno spazio proiettivo  $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$  indotta dall'isomorfismo lineare  $\varphi \in GL(V)$ , dimostrare le seguenti affermazioni:

(a)  $P = [v] \in \mathbb{P}$  è un punto fisso per  $f$  se e solo se  $v$  è un autovettore per  $\varphi$ .

(b) Se  $K$  è algebricamente chiuso, ogni proiettività di  $\mathbb{P}$  ha almeno un punto fisso.

(c) Se  $K = \mathbb{R}$  e  $n = \dim \mathbb{P}$  è pari, ogni proiettività di  $\mathbb{P}$  ha almeno un punto fisso.

16. (Senersi Geo 1, Es.27.4) Determinare i punti fissi delle seguenti proiettività di  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$

(a)  $f([x_0, x_1, x_2]) = [-x_0 + 15x_1 + 6x_2, -2x_0 + 8x_1 + 2x_2, 4x_0 - 18x_1 - 5x_2];$

- (b)  $g([x_0, x_1, x_2]) = [x_0 - x_1, x_0 + 3x_1, 2x_2]$ .
17. (Dall'esame del 23 febbraio 2020) Si considerino in  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  i punti  $P_1 = [1, 0, 1]$ ,  $P_2 = [0, 1, 1]$ ,  $P_3 = [2, 1, 2]$ .
- Determinare equazioni cartesiane per i sottospazi  $L(P_i, P_j)$  per  $i, j \in \{1, 2, 3\}$  e determinare le loro intersezioni a due a due. I punti  $P_1, P_2, P_3$  sono in posizione generale?
  - Esistere, se esiste, una proiettività che mandi, rispettivamente,  $P_1$  in  $[1, 0, 0]$ ,  $P_2$  in  $[0, 1, 0]$ ,  $P_3$  in  $[0, 0, 1]$ . Quante proiettività esistono che soddisfano queste condizioni?
  - Esiste un punto  $P_4 \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  tale che i punti  $P_1, P_2, P_3, P_4$  sono in posizione generale in  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ ? Se sì, fare un esempio e descrivere esplicitamente il luogo di tali punti.
18. (dall'esame del 10 settembre 2019) Si considerino in  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$  i punti  $P_1 = [1, 0, 1, 2]$ ,  $P_2 = [0, 1, 1, 1]$ ,  $P_3 = [2, 1, 2, 2]$ ,  $P_4 = [1, 1, 1, 0]$ .
- Dire se  $P_1, P_2, P_3, P_4$  sono in posizione generale.
  - Si calcoli la dimensione del sottospazio generato da  $P_1, P_2, P_3, P_4$  e se ne determinino (la/le) equazioni cartesiane.
  - Si completi, se possibile, l'insieme  $\{P_1, P_2, P_3\}$  ad un riferimento proiettivo di  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ .
19. (dall'esame del 21 giugno 2019) Si considerino i seguenti 4 punti in  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ :  $P_0 = [1, 0, 0]$ ,  $P_1 = [1, 1, 0]$ ,  $P_2 = [1, 1, 1]$ ,  $P_3 = [2, 0, 1]$ ;
- Verificare se sono in posizione generale (definire un insieme di punti in posizione generale).
  - Determinare, se esistono, tutte le proiettività  $f$  tali che  $f(P_i) = P_i$  Per ogni  $i = 0, \dots, 3$ .
  - Determinare, se esistono, tutte le proiettività  $f$  tali che  $f([1, 0, 0]) = P_0$ ,  $f([0, 1, 0]) = P_1$ ,  $f([0, 0, 1]) = P_2$ ,  $f([1, 1, 1]) = P_3$ .
  - Data la proiettività  $f$  del punto precedente, trovarne il luogo fisso.
  - Scrivere l'equazione della retta  $r$  tra  $P_2$  e  $P_3$ . Determinare, se esistono, tutte le proiettività  $f$  di  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  che hanno come luogo fisso  $r$  e  $P_0$ .