

ESERCIZI 4

L. Stoppino, corso di Geometria 1
Università di Pavia, a.a. 2018/19

1. Siano $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ due topologie sullo stesso insieme X , con \mathcal{T}_1 meno fine di \mathcal{T}_2 , cioè $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Quali due delle seguenti due implicazioni sono valide?

$$(X, \mathcal{T}_1) \text{ compatto} \Rightarrow (X, \mathcal{T}_2) \text{ compatto},$$

$$(X, \mathcal{T}_2) \text{ compatto} \Rightarrow (X, \mathcal{T}_1) \text{ compatto}.$$

2. Dimostrare che un sottoinsieme chiuso e discreto di uno spazio compatto è finito.
3. Dimostrare che $\{x \in \mathbb{Q} \mid |x| < \sqrt{3}\}$ è chiuso e limitato ma non è compatto.
4. Siano $a < b$ numeri reali.
- (a) Dimostrare che $[a, b] \cap \mathbb{Q}$ non è compatto esibendo un suo ricoprimento aperto che non possiede sottoricoprimenti finiti.
 - (b) Dimostrare che $[a, b] \cap \mathbb{Q}$ non è compatto per successioni esibendo una successione in $[a, b] \cap \mathbb{Q}$ che non abbia sottosuccessioni convergenti in $[a, b] \cap \mathbb{Q}$.
 - (c) Dimostrare che $[a, b] \cap \mathbb{Q}$ non è numerabilmente compatto esibendo un sottoinsieme $Z \subseteq [a, b] \cap \mathbb{Q}$ infinito privo di punti di accumulazione.
5. Mostrare che l'unione di un numero finito di sottospazi compatti di uno spazio topologico è compatta.
6. Dimostrare che per ogni $n \geq 1$ e per ogni $p \in S^n$, S^n non è omeomorfo a $S^n \setminus \{p\}$.
7. Dimostrare che uno spazio con la topologia discreta è compatto se e solo se è finito.
8. Dimostrare che \mathbb{R}^n non è omeomorfo a $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ per ogni $n > 0$. (sugg: Esempio 4.64. del Manetti).
9. Mostrare che un sottospazio compatto di uno spazio metrico è chiuso e limitato. Mostrare che il viceversa non vale in generale (ma per la metrica euclidea su \mathbb{R}^n sì!).
10. Vero o falso? [se vero dimostrate, se falso esibite un controesempio]
- (a) Un sottospazio chiuso di uno spazio compatto è compatto.
 - (b) Un sottospazio aperto di uno spazio compatto è compatto.

- (c) Un sottospazio compatto di uno spazio T2 è chiuso.
 - (d) Un sottospazio compatto di uno spazio T1 è chiuso.
 - (e) Un sottospazio compatto di uno spazio T0 è chiuso.
11. Siano K, L due sottospazi compatti di uno spazio di Hausdorff X . Mostrare che esistono due aperti U, V in X tali che $K \subseteq U, L \subseteq V$ e $U \cap V = \emptyset$.
12. Sia \mathcal{E} la topologia euclidea su \mathbb{R} . Sia \mathcal{T}_S la topologia di Sorgenfrey su \mathbb{R} , i.e., la topologia una cui base di aperti è la famiglia degli intervalli del tipo $[a, b)$, con $a < b$. Si consideri l'insieme

$$X := \left\{ -\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_{>0} \right\} \subset \mathbb{R}.$$

- (a) X è compatto in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$? $X \cup \{0\}$ è compatto in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$?
- (b) X è compatto in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$? $X \cup \{0\}$ è compatto in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$?

Stesse domande con $Y := \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_{>0} \right\} \subset \mathbb{R}$.

13. Sia $f: X \rightarrow Y$ un'applicazione tra due spazi topologici, con Y compatto e di Hausdorff. Dimostrare che f è continua se e solo se il grafico Γ_f è chiuso nel prodotto $X \times Y$.
14. Sia $f: X \rightarrow Y$ mappa quoziente; X compatto e T2. Mostrare che sono equivalenti:
- (a) Y è T2;
 - (b) f è chiusa;
 - (c) $K = \{(x, x') \in X \times X \mid f(x) = f(x')\}$ è chiuso in $X \times X$.
15. Sia X uno spazio metrico. Siano $C, D \subseteq X$ chiusi non vuoti. Poniamo

$$d(C, D) := \inf\{d(x, y), x \in C, y \in D\}.$$

Dimostrare che se C oppure D sono compatti, allora $d(C, D) \neq \emptyset$ se e solo se $C \cap D \neq \emptyset$. Fare un esempio in cui $d(C, D) = 0$ ma $C \cap D = \emptyset$.

16. Data un'applicazione continua $f: X \rightarrow Y$ che sia chiusa con Y compatto e con fibra compatta, dimostrare che X è compatto.
17. Siano X, Y spazi topologici, X compatto. Dimostrare che la proiezione sul secondo fattore $q: X \times Y \rightarrow Y$ è chiusa. (oss: questo esercizio insieme con il precedente dà una dimostrazione alternativa del fatto che il prodotto di due spazi compatti è compatto).

18. Si consideri la seguente famiglia su \mathbb{R} : $\mathcal{T} := \{Y \subset \mathbb{R} \mid Y \cap \mathbb{N} = \emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\}$.

- (a) Si verifichi che è una topologia su \mathbb{R} .
- (b) Si stabilisca se è confrontabile con la topologia euclidea \mathcal{T}_e .
- (c) $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ è compatto?
- (d) $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ è connesso?

19. Consideriamo su \mathbb{R} la topologia della continuità superiore \mathcal{T}_+ , i cui aperti sono il vuoto, \mathbb{R} e gli intervalli della forma $(-\infty, a)$, con $a \in \mathbb{R}$. Stabilire quali dei seguenti sottoinsiemi di \mathbb{R} sono compatti rispetto a \mathcal{T}_+ :

$$A = (0, 1), B = [0, 1), C = (0, +\infty), D = [0, +\infty), E = (-\infty, 1), F = (-\infty, 1].$$

20. Vero o falso? [se vero spiegate perché, se falso esibite un controesempio]

- (a) $(\mathbb{R}, \mathcal{C})$ (con la topologia concreta) è compatto;
- (b) $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$ (con la topologia discreta) è compatto;
- (c) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ (con la topologia euclidea) è compatto;
- (d) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ (retta di Sorgenfrey) è compatto.

Discutere le stesse affermazioni con il sottospazio $[0, 1]$ ed il sottospazio $[0, 1)$.

21. Mostrare che esiste uno spazio metrico completo non separabile. (L'esercizio 3.11.4 del Sernesi 2 non è corretto. Suggerimento: considerare \mathbb{R} con la metrica discreta).

22. Mostrare che uno spazio metrico totalmente limitato è separabile.

23. (Sernesi 2 es 3.11.6) Mostrare che in uno spazio metrizzabile X un sottoinsieme è compatto se e solo se è chiuso e compatto per successioni.

24. (Sernesi 2 es 3.11.9) Un punto isolato di uno spazio topologico X è un punto $x \in X$ tale che esiste un intorno U di x tale che $U \cap X = \{x\}$. Dimostrare che uno spazio metrico completo privo di punti isolati non è numerabile.