

ESERCIZI 5

L. Stoppino, corso di Geometria 1
Università di Pavia, a.a. 2020/21

1. (Senersi Geo 1, Es.28.1) Per ciascuna delle seguenti coniche di $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$, determinare la chiusura proiettiva e i punti impropri.
 - (a) $x + 2y^2 - 1 = 0$;
 - (b) $x^2y^2 - 1 = 0$;
 - (c) $3y + xy + xy^2 = 0$;
 - (d) $x^2y - xy^2 + x^2 - y = 0$.

2. (Senersi Geo 1, Es.28.2) Stabilire quali delle seguenti curve in \mathbb{E}^2 sono simmetriche rispetto all'origine o rispetto agli assi coordinati.
 - (a) $xy + y^2 - y = 0$;
 - (b) $x = y = xy = 0$;
 - (c) $1 + x^2 + y^2 = 0$

3. (Senersi Geo 1, Es.30.1) Per ciascuna delle seguenti coniche di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, determinare rango ed equazione canonica.
 - (a) $x_0^2 - x_1^2 + x_1x_2 = 0$;
 - (b) $x_0x_1 + x_1x_2 + x_0x_2 = 0$;
 - (c) $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - 2x_0x_1 + 2x_0x_2 - 2x_1x_2 = 0$.

4. (Senersi Geo 1, Es.30.2) Date le coniche dell'esercizio precedente, vederle come coniche complesse in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, e determinare rango ed equazione canonica.

5. (Senersi Geo 1, Es.31.2) Per ciascuna delle seguenti coniche di $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$, stabilire:
 - se sono a centro, e nel caso, e coordinate del centro.
 - Classificarle, cioè trovare l'equazione canonica.
 - (a) $x^2 + y^2 + xy + x + y = 1$;
 - (b) $5x^2 - 26xy + 5y^2 + 10 = 0$;
 - (c) $x^2 + y^2 - 2xy - 2y = 0$;
 - (d) $3x^2 - 8xy - 3y^2 + 10 = 0$;
 - (e) $2y^2 + 2\sqrt{3}xy - 2\sqrt{3}x + 2y - 5 = 0$.

6. (Senersi Geo 1, Es.31.3) Si considerino le coniche dell'esercizio precedente, e le si classifichi dal punto di vista euclideo, trovando per ciascuna di esse un'equazione canonica ed una isometria che trasforma la conica in forma canonica.

7. (Esame 9 luglio 2019) Dato un sistema di riferimento cartesiano in un piano euclideo \mathbb{E}^2 si consideri la conica \mathcal{C} di equazione:

$$\mathcal{C}: 2x^2 + 2xy + 2y^2 + y - 1 = 0.$$

- (a) Classificarla dal punto di vista affine e trovare l'equazione canonica. È una conica a centro? Se sì trovare le coordinate del centro.
- (b) Classificarla dal punto di vista euclideo: trovare la forma canonica e un cambiamento di coordinate cartesiane che la porta in forma canonica.
- (c) Scrivere l'equazione della chiusura proiettiva di \mathcal{C} in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, e trovare, se esistono i punti impropri.
8. (Esame del 21 gennaio 2020) Sia \mathcal{C} la conica di equazione $\mathcal{C}: 3x^2 + 3y^2 + 2xy - 8 = 0$ nel piano euclideo E^2 .
- (a) La si classifichi dal punto di vista euclideo e affine. Determinare l'equazione canonica euclidea di \mathcal{C} in \mathbb{E}^2 .
- (b) Determinare il cambiamento di coordinate euclidee necessario affinché assuma tale equazione.
- (c) Si scriva l'equazione della chiusura proiettiva di \mathcal{C} in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ e se ne calcolino i punti impropri.
9. (Esercizio Pirola compito 16/06/2017) Si consideri la famiglia di coniche \mathcal{C}_a in $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$, dipendente dal parametro $a \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{C}_a = \{(x, y) \mid 2x^2 + 6axy + 9ay^2 + 2y + 6 = 0, a \in \mathbb{R}\}.$$

- (a) Dare la classificazione affine delle coniche \mathcal{C}_a al variare di $a \in \mathbb{R}$.
- (b) Dire se per qualche valore di $a \neq 0$ \mathcal{C}_a è equivalente dal punto di vista affine e/o euclideo a \mathcal{C}_0 .
10. (Esercizio Pirola compito 05/09/2017) Sia Oxy un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo \mathbb{E} di dimensione 2. Si consideri la famiglia di coniche \mathcal{C}_a , dipendenti dal parametro $a \in \mathbb{R}$, definite rispetto al riferimento, dalle equazioni:

$$\mathcal{C}_a = \{(x, y) \mid x^2 + 10axy - 25ay^2 - 2y = 0, a \in \mathbb{R}\}.$$

- (a) Dare la classificazione affine delle coniche \mathcal{C}_a della famiglia.
- (b) Dire quali valore di $a \neq 0$ la conica \mathcal{C}_a è equivalente dal punto di vista affine ed euclideo a \mathcal{C}_0 .
11. Si consideri la conica in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$:

$$\mathcal{C}: x_1^2 + x_2^2 - 2x_0x_1 = 0$$

- (a) Siano \mathcal{C}_i le coniche affini corrispondenti a \mathcal{C} nelle carte affini \mathcal{U}_i , per $i = 0, 1, 2$. Classificarle dal punto di vista affine.
- (b) Rappresentare con un disegno il supporto di \mathcal{C} insieme con le rette $x_0 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.