ESERCIZI 5

L. Stoppino, corso di Geometria 1
Università di Pavia, a.a. 2018/19

1. Dimostrare che la connessione e la connessione per archi sono proprietà topologiche. La proprietà di essere connesso (risp. cpa) passa ai sottospazi?

2. Siano $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ due topologie sullo stesso insieme X, con $\mathcal{T}_1$ meno fine di $\mathcal{T}_2$, cioè $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Quali due delle seguenti quattro implicazioni sono valide?

$$(X, \mathcal{T}_1) \text{ sconnesso } \Rightarrow (X, \mathcal{T}_2) \text{ sconnesso},$$

$$(X, \mathcal{T}_2) \text{ sconnesso } \Rightarrow (X, \mathcal{T}_1) \text{ sconnesso},$$

$$(X, \mathcal{T}_1) \text{ connesso } \Rightarrow (X, \mathcal{T}_2) \text{ connesso},$$

$$(X, \mathcal{T}_2) \text{ connesso } \Rightarrow (X, \mathcal{T}_1) \text{ connesso}.$$

3. Sia $X = \mathbb{R}$ con $\mathcal{T}_1 = \mathcal{K}$ la topologia cofinita. Stabilire se $(X, \mathcal{K})$ è connesso. È connesso per archi?

4. Sia X uno spazio topologico. Dimostrare che sono equivalenti:
   (a) X connesso;
   (b) non esiste un'applicazione continua suriettiva da X in $\{0, 1\}$ con la topologia discreta;
   (c) per ogni coppia di punti $p, q \in X$ e per ogni ricoprimento aperto $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in A}$, esiste una sottofamiglia finita $\{\mathcal{U}_{\alpha_1}, \mathcal{U}_{\alpha_2}, \ldots, \mathcal{U}_{\alpha_k}\}$ tale che $p \in \mathcal{U}_{\alpha_1}$, $q \in \mathcal{U}_{\alpha_k}$ e per ogni $i < k$ vale che $\mathcal{U}_{\alpha_i} \cap \mathcal{U}_{\alpha_{i+1}} \neq \emptyset$.

5. (Manetti 5.9) Mostrare che, al variare di A tra i sottoinsiemi di $[0, 1]$ formati da due punti distinti, lo spazio quoziente $[0, 1]/A$ può assumere tre diverse classi di omeomorfismo. Stabilire quando lo spazio quoziente $[0, 1]/A$ è T2.

6. (Kosniowski Teorema 9.6) Sia $\{Z_\alpha, \alpha \in I\}$ una famiglia di sottospazi connessi di uno spazio topologico X. Se vale che $\cap_\alpha Z_\alpha \neq \emptyset$, allora $W := \cup_\alpha Z_\alpha$ è connesso.

7. (Kosniowski 9.8 (f), Manetti 4.12) Sia $\{Z_\alpha, \alpha \in I\}$ una famiglia di sottospazi connessi di uno spazio topologico X. Se vale che esiste $\overline{\alpha}$ tale che $Z_{\overline{\alpha}} \cap Z_\alpha \neq \emptyset$ per ogni $\alpha \in I$, allora $W := \cup_\alpha Z_\alpha$ è connesso.

8. (Manetti 4.14) Sia $\{A_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ una famiglia numerabile di sottospazi connessi di uno spazio topologico X tali che $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Dimostrare che $A := \cup_n A_n$ è connesso.

9. (Kosniowski 9.8 (e)) Dimostrare che uno spazio X è connesso se e solo se ogni funzione da continua da X in $\mathbb{Z}$ è costante. Dimostrare che uno spazio X è connesso se e solo se ogni funzione da continua da X in uno spazio discreto è costante.

10. Dimostrare che il prodotto di due spazi connessi per archi è connesso per archi.

11. Un sottoinsieme S di $\mathbb{R}^n$ si dice stellato se esiste un $x \in S$ tale che per ogni $y \in S$ il segmanto tra x e y è contenuto in S. Dimostrare che gli stellati sono connessi.

12. Sia X uno spazio connesso tale che esiste una applicazione continua non costante $f\colon X \to \mathbb{R}$. Mostrare che X ha cardinalità infinita non numerabile. Mostrare che se X è uno spazio connesso metrico con almeno due punti, X ha cardinalità infinita non numerabile.

13. Dimostrare che se ogni punto di uno spazio topologico X possiede un intorno connesso, allora le componenti connesse in X sono aperte e viceversa.

14. Dimostrare che uno spazio topologico X è localmente connesso (cioè ogni suo punto possiede un sistema fondamentale di intorni connessi) se e solo se per ogni aperto $\mathcal{U}$ di X le componenti connesse di $\mathcal{U}$ sono aperte in X.

15. Il quoziente di uno spazio topologico localmente connesso è ancora localmente connesso?

16. Dimostrare che il numero di componenti connesse di uno spazio topologico è un invariante topologico.

17. Sia $S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \ \ e \ \ y/x \in \mathbb{N}\}$.
    (a) Determinare $\overline{S}$ (la chiusura di S) e dire quali sono i punti di accumulazione di S.
    (b) S è connesso?
    (c) $\overline{S}$ è connesso?
    (d) S è localmente connesso?
    (e) $\overline{S}$ è localmente connesso?

18. (Manetti 4.13) Dimostrare che i due sottospazi di $\mathbb{R}^2$:
$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \text{ e } y \leq 0\},$$
$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y - 1)^2 = 1\},$$
non sono omeomorfi.

19. Costruire un esempio di spazio topologico connesso per archi che non è localmente connesso per archi (suggerimento: costruire una variante de "la pulce e il pettine" o del "seno del topologo").

20. Classificare a meno di omeomorfismi i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ (con la topologia euclidea).

    (a) una retta;

    (b) l'unione di due rette;

    (c) $\{(x, y) \mid x^2 + y = 1\}$;

    (d) $\{(x, y) \mid xy = 1\}$.

21. Quali sono le componenti connesse si $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ con la topologia euclidea? Esiste una topologia diversa su $\mathbb{Q}$ con le stesse componenti?

22. Uno spazio topologico si dice *totalmente sconnesso* se presi comunque due punti $x, y \in X$, esistono due aperti disgiunti $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ tali che $x \in \mathcal{U}$, $y \in \mathcal{V}$ e $X = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$. Ovviamente uno spazio totalmente sconnesso non è connesso.

    (a) Fare un esempio di uno spazio sconnesso non totalmente sconnesso.

    (b) L'insieme dei razionali $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ con la topologia euclidea è totalmente sconnesso?

    (c) Si dimostri che la retta di Sorgenfry $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ è totalmente sconnessa.

    (d) Si dimostri che le componenti connesse di uno spazio topologico X totalmente sconnesso sono i sottoinsiemi costituiti da un solo punto.

23. Vero o falso? [se vero dimostratelo o spiegate perchè, se falso esibite un controesempio]

    (a) Il quoziente di un connesso è connesso;

    (b) Il quoziente di uno spazio T2 è uno spazio T2;

    (c) La contrazione a un punto di un sottospazio compatto di uno spazio T2 è T2;

    (d) La contrazione a un punto di un sottospazio T2 di uno spazio T2 è T2.