

## TOPOLOGIA-ESERCIZI 5

L. Stoppino, corso di Geometria 1  
Università di Pavia, a.a. 2019/20

1. Dimostrare che la connessione e la connessione per archi sono proprietà topologiche. La proprietà di essere connesso (risp. cpa) passa ai sottospazi?
2. Siano  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$  due topologie sullo stesso insieme  $X$ , con  $\mathcal{T}_1$  meno fine di  $\mathcal{T}_2$ , cioè  $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ . Quali due delle seguenti quattro implicazioni sono valide?

$$(X, \mathcal{T}_1) \text{ sconnesso} \Rightarrow (X, \mathcal{T}_2) \text{ sconnesso},$$

$$(X, \mathcal{T}_2) \text{ sconnesso} \Rightarrow (X, \mathcal{T}_1) \text{ sconnesso},$$

$$(X, \mathcal{T}_1) \text{ connesso} \Rightarrow (X, \mathcal{T}_2) \text{ connesso},$$

$$(X, \mathcal{T}_2) \text{ connesso} \Rightarrow (X, \mathcal{T}_1) \text{ connesso}.$$

3. Sia  $X = \mathbb{R}$  con  $\mathcal{T}_1 = \mathcal{K}$  la topologia cofinita. Stabilire se  $(X, \mathcal{K})$  è connesso. È connesso per archi?
4. (Manetti 5.9) Mostrare che, al variare di  $A$  tra i sottoinsiemi di  $[0, 1]$  formati da due punti distinti, lo spazio quoziente  $[0, 1]/A$  può assumere tre diverse classi di omeomorfismo. Stabilire quando lo spazio quoziente  $[0, 1]/A$  è T2.
5. (Kosniowski Teorema 9.6) Sia  $\{Z_\alpha, \alpha \in I\}$  una famiglia di sottospazi connessi di uno spazio topologico  $X$ . Se vale che  $\bigcap_\alpha Z_\alpha \neq \emptyset$ , allora  $W := \bigcup_\alpha Z_\alpha$  è connesso.
6. (Kosniowski 9.8 (f), Manetti 4.12) Sia  $\{Z_\alpha, \alpha \in I\}$  una famiglia di sottospazi connessi di uno spazio topologico  $X$ . Se vale che esiste  $\bar{\alpha}$  tale che  $Z_{\bar{\alpha}} \cap Z_\alpha \neq \emptyset$  per ogni  $\alpha \in I$ , allora  $W := \bigcup_\alpha Z_\alpha$  è connesso.
7. (Manetti 4.14) Sia  $\{A_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$  una famiglia numerabile di sottospazi connessi di uno spazio topologico  $X$  tali che  $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$  per ogni  $n \in \mathbb{Z}$ . Dimostrare che  $A := \bigcup_n A_n$  è connesso.
8. (Kosniowski 9.8 (e)) Dimostrare che uno spazio  $X$  è connesso se e solo se ogni funzione da continua da  $X$  in  $\mathbb{Z}$  è costante. Dimostrare che uno spazio  $X$  è connesso se e solo se ogni funzione da continua da  $X$  in uno spazio discreto è costante.
9. Dimostrare che il prodotto di due spazi connessi per archi è connesso per archi.
10. Sia  $f: X \rightarrow Y$  un'applicazione continua e suriettiva tra spazi topologici. Se  $f$  è un'identificazione e  $Y$  è connesso e per ogni  $y \in Y$  la fibra  $f^{-1}(y)$  è connessa in  $X$ , allora  $X$  è connesso.

11. Dimostrare che un sottospazio convesso in  $\mathbb{R}^n$  è connesso. Vale il viceversa? (in generale no, per  $n = 1$  sì, dimostrato a lezione).
12. Dimostrare che un sottospazio convesso in  $\mathbb{R}^n$  è connesso per archi.
13. Un sottoinsieme  $S$  di  $\mathbb{R}^n$  si dice stellato se esiste un  $x \in S$  tale che per ogni  $y \in S$  il segmento tra  $x$  e  $y$  è contenuto in  $S$ . Dimostrare che gli stellati sono connessi.
14. Sia  $X$  uno spazio connesso tale che esiste una applicazione continua non costante  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ . Mostrare che  $X$  ha cardinalità infinita non numerabile. Mostrare che se  $X$  è uno spazio connesso metrico con almeno due punti,  $X$  ha cardinalità infinita non numerabile.
15. Dimostrare che se ogni punto di uno spazio topologico  $X$  possiede un intorno connesso, allora le componenti connesse in  $X$  sono aperte e viceversa.
16. Dimostrare che  $S^n$  è connesso per archi. Dimostrare che  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$  e  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$  sono connessi per archi. Dimostrare che il toro è connesso per archi.
17. Dimostrare che uno spazio topologico  $X$  è localmente connesso (cioè ogni suo punto possiede un sistema fondamentale di intorni connessi) se e solo se per ogni aperto  $\mathcal{U}$  di  $X$  le componenti connesse di  $\mathcal{U}$  sono aperte in  $X$ .
18. Il quoziente di uno spazio topologico localmente connesso è ancora localmente connesso?
19. Dimostrare che il numero di componenti connesse di uno spazio topologico è un invariante topologico.
20. Sia  $S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \text{ e } y/x \in \mathbb{N}\}$ .
  - (a) Determinare  $\overline{S}$  (la chiusura di  $S$ ) e dire quali sono i punti di accumulazione di  $S$ .
  - (b)  $S$  è connesso?
  - (c)  $\overline{S}$  è connesso?
  - (d)  $S$  è localmente connesso?
  - (e)  $\overline{S}$  è localmente connesso?
21. (Manetti 4.13) Dimostrare che i due sottospazi di  $\mathbb{R}^2$ :

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \text{ e } y \leq 0\},$$

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y - 1)^2 = 1\},$$

non sono omeomorfi.

22. Costruire un esempio di spazio topologico connesso per archi che non è localmente connesso per archi (suggerimento: costruire una variante de “la pulce e il pettine” o del “seno del topologo”).
23. Classificare a meno di omeomorfismi i seguenti sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^2$  (con la topologia euclidea).
- (a) una retta;
  - (b) l’unione di due rette;
  - (c)  $\{(x, y) \mid x^2 + y = 1\}$ ;
  - (d)  $\{(x, y) \mid xy = 1\}$ .
24. Classificare a meno di omeomorfismi le unioni di tre rette in  $\mathbb{R}^2$ .
25. Quali sono le componenti connesse di  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  con la topologia euclidea? Esiste una topologia diversa su  $\mathbb{Q}$  con le stesse componenti?
26. Uno spazio topologico si dice *totalmente sconnesso* se  $|X| > 1$  e presi comunque due punti distinti  $x, y \in X$ , esistono due aperti disgiunti  $\mathcal{U}, \mathcal{V}$  tali che  $x \in \mathcal{U}, y \in \mathcal{V}$  e  $X = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ . Ovviamente uno spazio totalmente sconnesso non è connesso.
- (a) Fare un esempio di uno spazio sconnesso non totalmente sconnesso.
  - (b) L’insieme dei razionali  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  con la topologia euclidea è totalmente sconnesso?
  - (c) Si dimostri che la retta di Sorgenfrey  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$  è totalmente sconnessa.
  - (d) Si dimostri che le componenti connesse di uno spazio topologico  $X$  totalmente sconnesso sono i sottoinsiemi costituiti da un solo punto.
27. Vero o falso? [se vero dimostratele o spiegate perchè, se falso esibite un controesempio]
- (a) Il quoziente di un connesso è connesso;
  - (b) Il quoziente di uno spazio T2 è uno spazio T2;
  - (c) La contrazione a un punto di un sottospazio compatto di uno spazio T2 è T2;
  - (d) La contrazione a un punto di un sottospazio T2 di uno spazio T2 è T2.
28. Dimostrare che tutte le rette in  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  sono connesse. Dimostrare che tutte le coniche in  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  sono connesse.