<u>ESERCIZI 7</u>

L. Stoppino, corso di Geometria 1
Università di Pavia, a.a. 2018/19

1. Sia $\mathbb{P}$ uno spazio proiettivo di dimensione 3. Dimostrare che tre piani distinti Π_1, Π_2, Π_3 si incontrano sempre in almeno un punto. Generalizzare a n iperpiani distinti in uno spazio proiettivo di dimensione n.

2. Dimostrare che dati n punti P_i in posizione generale in uno spazio proiettivo $\mathbb{P}$ di dimensione n (quindi i punti sono linearmente indipendenti in questo caso). se considero un riferimento proiettivo in $\mathbb{P}$ e delle coordinate proiettive per i punti $P_i = (p_0^i, \ldots, p_n^i)$, una equazione per $L(P_1, \ldots P_n)$ la seguente:

$$\begin{vmatrix} x_0 & \ldots & x_n \\ p_0^1 & \ldots & p_n^1 \\ & \ldots & \\ p_0^n & \ldots & p_n^n \end{vmatrix} = 0$$

3. Si mostri che i punti del piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$

$$[1, 1, 1],\ [3, 1, 0],\ [1, -\frac{1}{3}, -1]$$

sono allineati, e si determini un'equazione della retta che li contiene.

4. Siano A, B, C tre punti di un piano proiettivo $\mathbb{P}$ in posizione generale; sia r una retta che non contenga nessuno dei tre punti. Si dimostri che esiste un'unica proiettività f di $\mathbb{P}$ tale che $f(A) = A$, $f(B) = C$, $f(C) = B$, $f(r) = r$.

5. Si considerino in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ i punti

$$P_1 = [1, 0, 1, 2],\ P_2 = [0, 1, 1, 1],\ P_3 = [1, \frac{1}{2}, 1, 1],\ P_4 = [1, 1, 1, 0].$$

   (a) Si dica se P_1, P_2, P_3, P_4 sono in posizione generale.
   (b) Si calcoli la dimensione del sottospazio generato da $L(P_1, P_2, P_3, P_4)$ e se ne determinino equazioni cartesiane.
   (c) Si completi, se possibile, l'insieme $\{P_1, P_2, P_3\}$ ad un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$.

6. Determinare le coordinate omogenee del punto comune alle chiusure proiettive di ciascuna delle seguenti coppie di rette di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$:

   (a) $3x_0 - 4x_1 + x_2 = 2x_1 - x_2 + ix_0 = 0$;
   (b) $ix_0 + 2ix_2 - x_2 = (1 - i)x_0 + 2x_2 = 0$.

7. Siano A, B, C, D punti di $\mathbb{P}^2_K$ in posizione generale e siano $P = L(A, B) \cap L(C, D)$, $Q = L(A, C) \cap L(B, D)$, $R = L(A, D) \cap L(B, C)$. Si mostri che P, Q, R non sono allineati.

8. (ref: Fortuna, Frigerio, Pardini Es. 2.10) Siano r_1, r_2, r_3 rette di $\mathbb{P}^4_K$ a due a due sghembe e non tutte contenute in un iperpiano. Si dimostri che esiste un'unica retta che interseca sia r_1, sia r_2, sia r_3.

9. (ref: Fortuna, Frigerio, Pardini Es. 2.12) Siano $r, r' \subset \mathbb{P}^3_K$ due rette sghembe e sia $P \in \mathbb{P}^3_K \setminus (r \cup r')$. Si dimostri che esiste un'unica retta $l \subset \mathbb{P}^3_K$ che contiene P e che interseca sia r sia r'. Si determinino equazioni cartesiane per l nel caso in cui $K = \mathbb{R}$, $P = [0, 1, 0, 1]$, e le rette r ed r' abbiano equazioni rispettivamente:

$$r : x_0 + x_2 + x_3 = 2x_0 + x_1 = 0, \quad r' : 2x_1 - 3x_2 - x_3 = x_0 + x_3 = 0.$$

10. Consideriamo la carta affine $\mathbb{P}^n_K \setminus H_0 \xrightarrow{j_0} \mathbb{A}^n_K$.

    (a) Dimostrare che se $P_0, \dots P_k$ sono punti affinemente indipendenti di $\mathbb{A}^n_K$, allora i $P'_i := j_0^{-1}(P_i)$ sono punti linearmente indipendenti di $\mathbb{P}^n_K$.

    (b) Dimostrare che se $Q_0, \dots Q_k$ sono punti linearmente indipendenti di $\mathbb{P}^n_K$ che non appartengono a H_0, allora $j_0(Q_i)$ sono punti affinemente indipendenti di $\mathbb{A}^n_K$.

11. (Sernesi Geo1 Es. 27.1) Determinare la formula del cambiamento di coordinate dal riferimento standard di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ al riferimento individuato dalle seguenti quaterne ordinate di punti:

    (a) $P_0 = [1, 1, -1]$, $P_1 = [2, 1, 0]$, $P_2 = [0, 1, 1]$, $M = [1, 1, 0]$;

    (b) $P_0 = [1, -1, 0]$, $P_1 = [0, 1, 1]$, $P_2 = [2, 0, 1]$, $M = [1, 2, 2]$;

    (c) $P_0 = [1, 1, 1]$, $P_1 = [1, 0, 1]$, $P_2 = [1, \frac{1}{2}, 0]$, $M = [4, 2, 2]$.

12. (Senersi Geo 1, Es.27.2) Determinare la proiettività di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ che soddisfa le condizioni seguenti: $f([1, 1]) = [1, -1]$, $f([2, 0]) = [1, 1]$, $f([1, -1]) = [2, 1]$.

13. (Senersi Geo 1, Es.27.3) Determinare la proiettività di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ che soddisfa le condizioni seguenti:

$$f(r) = r', \quad f(s) = s', \quad f([1, 2, 1]) = [1, 1, 1], \text{ dove}$$

$$r : x_0 - x_1 = 0, \quad r' : x_0 + x_1 = 0, \quad s : x_0 + x_1 + x_2 = 0, \quad s' : x_1 + x_2 = 0.$$

14. (ref: Fortuna, Frigerio, Pardini Es. 2.14) Siano A, A', B, B' quattro punti distinti di $\mathbb{P} = \mathbb{P}^2_K$ non tutti allineati. Si dimostri che A, A', B, B' sono in posizione generale se e solo se esiste una proiettività $f : \mathbb{P}^2_K \to \mathbb{P}^2_K$ tale che $f(A) = B, f(A') = B', f^2 = f \circ f = Id_{\mathbb{P}}$.

15. Se f è una proiettività di uno spazio proiettivo $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ indotta dall'isomorfismo lineare $\varphi \in GL(V)$, dimostrare le seguenti affermazioni:

    (a) $P = [v] \in \mathbb{P}$ è un punto fisso per f se e solo se v è un autovettore per φ.

    (b) Se K è algebricamente chiuso, ogni proiettività di $\mathbb{P}$ ha almeno un punto fisso.

(c) Se $K=\mathbb{R}$ e $n=\dim\mathbb{P}$ è pari, ogni proiettività di $\mathbb{P}$ ha almeno un punto fisso.

16. (Senersi Geo 1, Es.27.4) Determinare i punti fissi delle seguenti proiettività di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$
    (a) $f([x_0,x_1,x_2]) = [-x_0+15x_1+6x_2, -2x_0+8x_1+2x_2, 4x_0-18x_1-5x_2]$;
    (b) $g([x_0,x_1,x_2]) = [x_0-x_1, x_0+3x_1, 2x_2]$.
17. (Senersi Geo 1, Es.31.1) Per ciascuna delle seguenti coniche di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, determinare rango ed equazione canonica.
    (a) $x_0^2 - x_1^2 + x_1x_2 = 0$;
    (b) $x_0x_1 + x_1x_2 + x_0x_2 = 0$;
    (c) $x_0^2 + x_1^+ x_2^2 - 2x_0x_1 - 2x_1x_2 = 0$.
18. (Senersi Geo 1, Es.31.2) Date le coniche dell'esercizio precedente, vederle come coniche complesse in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, e determinare rango ed equazione canonica.
19. (Senersi Geo 1, Es.32.2) Per ciascuna delle seguenti coniche di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, stabilire:
    - se sono a centro, e nel caso, e coordinate del centro.
    - Classificarle, cioè trovare l'equazione canonica.
    (a) $x^2+y^2+xy+x+y=1$;
    (b) $5x^2-26xy+5y^2+10=0$;
    (c) $x^2+y^2-2xy-2y=0$;
    (d) $3x^2-8xy-3y^2+10=0$;
    (e) $2y^2+2\sqrt{3}xy-2\sqrt{3}x+2y-5=0$.
20. (Senersi Geo 1, Es.32.3) Si considerino le coniche dell'esercizio precedente, e le si classifichi dal punto di vista euclideo, trovando per ciascuna di esse un'equazione canonica ed una isometria che trasforma la conica in forma canonica.
21. (Esercizio Pirola compito 16/06/2017) Si consideri la famiglia di coniche $\mathcal{C}_a$ in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, dipendente dal parametro $a\in\mathbb{R}$:
    $$\mathcal{C}_a = \{(x,y) \mid 2x^2+6axy+9ay^2+2y+6=0,\ a\in\mathbb{R}\}.$$
    (a) Dare la classificazione affine delle coniche $\mathcal{C}_a$ al variare di $a\in\mathbb{R}$.
    (b) Dire se per qualche valore di $a\neq 0$ $\mathcal{C}_a$ è equivalente dal punto di vista affine e/o euclideo a $\mathcal{C}_0$.
22. (Esercizio Pirola compito 05/09/2017) Sia Oxy un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo $\mathbb{E}$ di dimensione 2. Si consideri la famiglia di coniche $\mathcal{C}_a$, $a\in\mathbb{R}$, definite rispetto al riferimento, dalle equazioni:
    $$\mathcal{C}_a = \{(x,y) \mid x^2+10axy-25ay^2-2y=0,\ a\in\mathbb{R}\}.$$
    (a) Dare la classificazione affine delle coniche $\mathcal{C}_a$ della famiglia.
    (b) Dire quali valore di $a\neq 0$ la conica $\mathcal{C}_a$ è equivalente dal punto di vista affine ed euclideo a $\mathcal{C}_0$.