Geometria 1

Soluzioni scritto del 26 settembre

1) (Vero o falso) $f: (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$

(a) f suriettiva continua e chiusa è una identificazione.

vero: voglio vedere che la topologia τ_Y su Y è la topologia quoziente, cioè che

(*) $$\boxed{U \in \tau_Y \iff f^{-1}(U) \in \tau_X}$$

equivalentemente (prendo l'affermazione equivalente coi chiusi, visto che ho la condizione f chiusa)

$$\boxed{C \text{ chiuso in } Y \iff f^{-1}(C) \text{ chiuso in } X}$$

(infatti C chiuso in $Y \iff Y \setminus C$ aperto in $Y \iff f^{-1}(Y \setminus C)$ aperto in Y
$\iff \underbrace{f^{-1}(Y)}_{X} \setminus f^{-1}(C)$ aperto $\iff f^{-1}(C)$ chiuso in X)

Dunque sia C chiuso in Y. Poiché f è continua $f^{-1}(C)$ è chiuso in X.

D'altra parte sia $R \subseteq Y$ tale che $f^{-1}(R)$ è chiuso in X poiché f è chiusa per ipotesi, $f(f^{-1}(R))$ è chiuso in Y ma $R = f(f^{-1}(R))$ perché f è suriettiva.

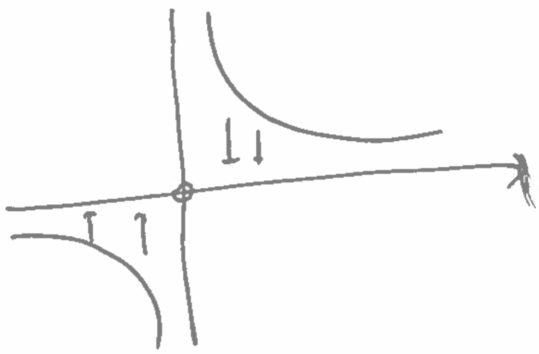
Dunque R è chiuso in Y.

(*) Questa affermazione è equivalente a:

$\left(\begin{array}{c}\text{topologia} \\ \text{quoziente}\end{array}\right) \tau_f = \tau_Y$ (topologia di Y)

(b) FALSO: Esistono identificazioni che non sono chiuse.

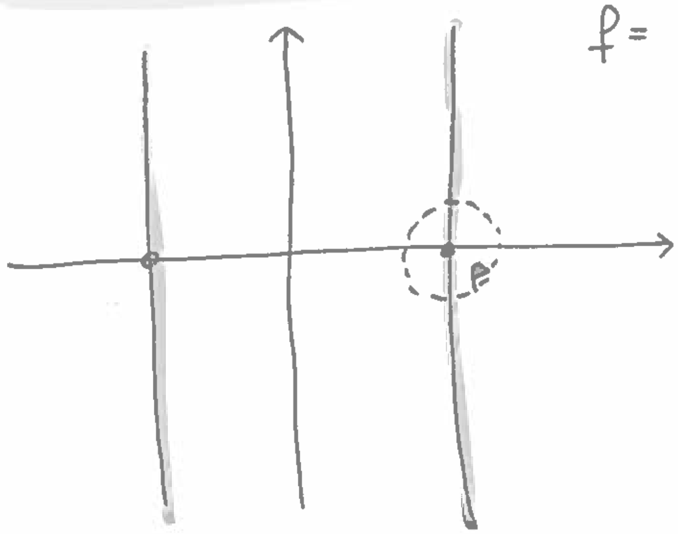
Ad esempio possiamo considerare $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $p(x, y) = x$ (con la topologia euclidea in partenza e in arrivo). E' una identificazione aperta ma non è chiusa: ad esempio $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ è chiuso in $\mathbb{R}^2$ (luogo di zeri della funzione continua $xy - 1$ da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$), ma $p(C) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ che non è chiuso in $\mathbb{R}$.



(c) Se Y ha la topologia discreta e $|Y| > 1$ allora X ha la topologia discreta (qui secondo me conviene pensare prima il d)

Falso: prendiamo ad esempio con la topologia euclidea $X = \{x = 1\} \cup \{x = -1\} \subseteq \mathbb{R}^2$

$f = p|_X : X \to \{\pm 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$, $\{\pm 1\} = Y$



Y ha la topologia discreta: $\tau_e|_Y = \wp_Y$ ma X non ha la topologia discreta: ad esempio $(1,0) = P \in X$ non è aperto: $\forall \varepsilon > 0$ $B_\varepsilon^{de}((1,0)) \cap X \supseteq \{1\} \times (-\varepsilon, \varepsilon)$

(d) se Y ha la topologia discreta e $|Y| > 1$ allora X non è connesso: <u>VERO</u>

Ricordiamo che connesso significa che se A, B sono aperti non vuoti in X tali che $A \cup B = X$, allora $A \cap B \neq \emptyset$. Sconnesso: se $\exists$ A, B aperti non vuoti tali che $A \cup B = X$ e $A \cap B = \emptyset$.

prendo ad esempio $y \in Y$ e $Y \setminus \{y\}$ in Y

Siccome su Y ho la topologia discreta $\{y\}$ e $Y \setminus \{y\}$ sono aperti (non vuoti e distinti)

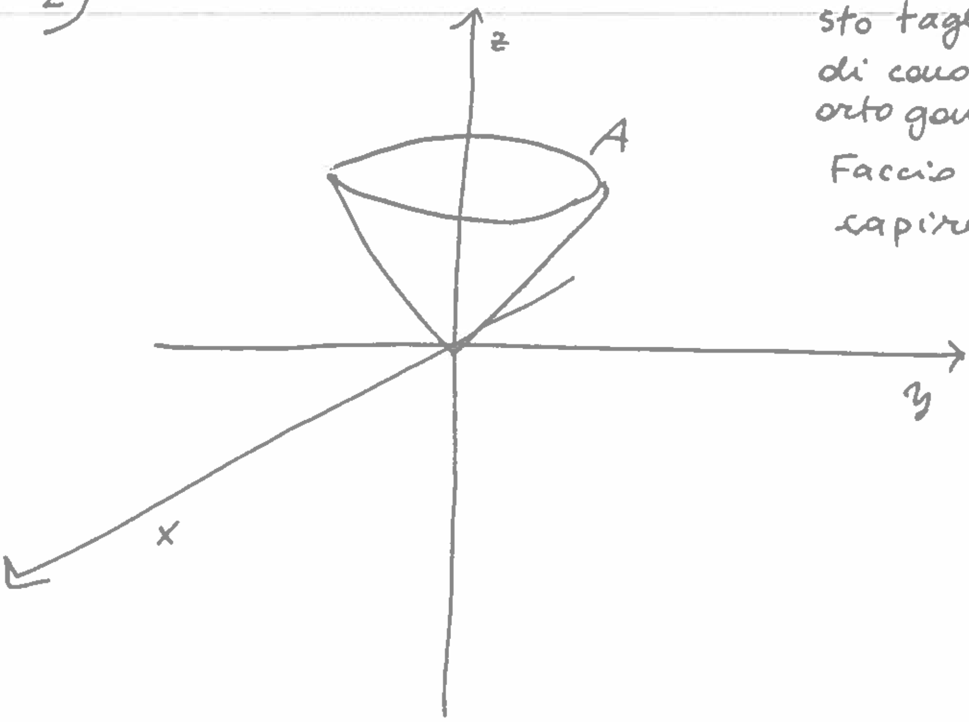
$\underset{A}{\overset{\parallel}{f^{-1}(y)}}$ e $\underset{B}{\overset{\parallel}{f^{-1}(Y \setminus \{y\})}}$ sono dunque due aperti non vuoti in X (perché f è continua)

disgiunti (perché lo sono $\{y\}$ e $Y \setminus \{y\}$) e tali che $f^{-1}(y) \cup f^{-1}(Y \setminus \{y\}) = f^{-1}(Y) = X$

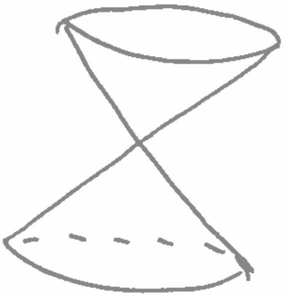
<u>Alternativamente</u>: l'immagine tramite continua di un connesso è connessa, dunque se X fosse connesso per assurdo $(Y, \mathcal{D})$ sarebbe connesso (sto usando f continua e suriettiva).

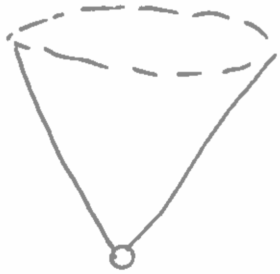
Ma uno spazio discreto è connesso se e solo se è il singoletto, mentre Y ha almeno due punti per ipotesi.

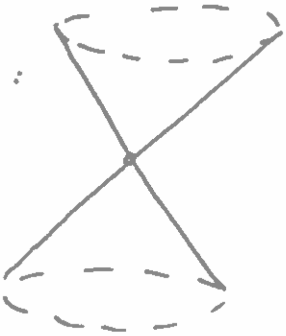
2)

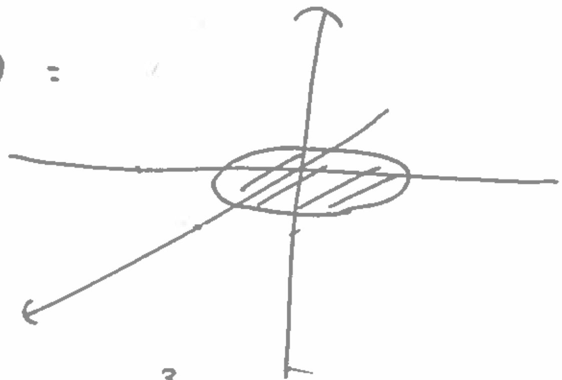


"sto tagliando dei pezzi di cono in $\mathbb{R}^3$ con semipiani ortogonali all'asse z"
Faccio dei disegni per capire la situazione.

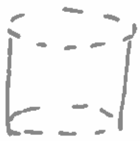
B = 

C 

E : 

D : 

Disco in $\mathbb{R}^3$

F = 

(a) trovare parte interna e chiusura:

$$A = f^{-1}(0) \cap g^{-1}([0,1]) \quad \text{dove} \quad f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$$

$$g(x,y,z) = z$$

g ed f sono funzioni continue

$\{0\}$ e $[0,1]$ sono chiusi in $\mathbb{R}$ dunque A è chiuso.

Allo stesso modo vedo che $B = f^{-1}(0) \cap g^{-1}([-1,1])$ dunque anche B è chiuso

$D = h^{-1}(0) \cap g^{-1}(0)$ con $h(x,y,z) = x^2+y^2$ dunque anche D è chiuso.

D'altra parte si vede subito che nessuno dei punti in questi insiemi è un punto interno:

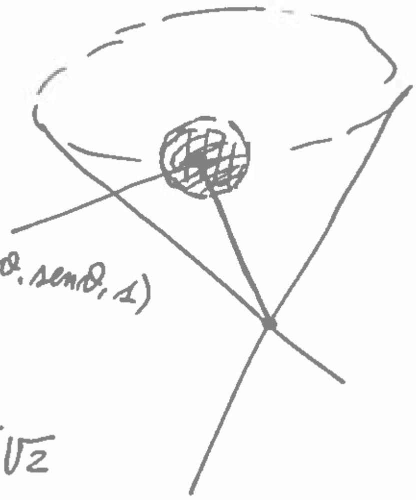
$\forall p \in A / \dots / F \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad B_\varepsilon(p) \not\subseteq A/\dots/F.$

Quindi la parte interna di ciascuno di essi è vuota.

Invece $\forall\ p \in S^1 \times \{1\}$, p è di aderenza per C:

Dato $p = (\cos\vartheta, \operatorname{sen}\vartheta, 1)$

dato $\varepsilon > 0$ se prendo



$(1-\delta)(\cos\vartheta, \operatorname{sen}\vartheta, 1) = p'$

con $0 < \delta < \varepsilon/\sqrt{2}$ $\quad (e\ \ \delta \ll 1)$

ho $d(p, p') = \delta \|(\cos\vartheta, \operatorname{sen}\vartheta, 1)\| = \delta\sqrt{2} < \varepsilon$

dunque $p' \in B_\varepsilon(p)$

e d'altra parte $p' \in$ retta tra p e 0 e dunque $p' \in C$.

(ovvero $\quad (1-\delta)^2\cos^2\vartheta + (1-\delta)^2 \operatorname{sen}^2\vartheta = (1-\delta)^2$

cioè p' soddisfa l'equazione di C)

Inoltre anche $(0,0,0)$ è un punto di aderenza per C.

Con gli stessi ragionamenti si vede che

$S^1 \times \{\pm 1\}$ sono punti di aderenza per E e per F

<u>Riassumendo:</u> $\bar{A} = A$, $\mathring{A} = \emptyset = \mathring{C} = \mathring{D} = \mathring{E} = \mathring{F}$,

$\bar{B} = B$,

$\bar{C} = C \cup \{\underline{0}\} \cup (S^1 \times \{1\})$,

$\bar{D} = D$, $\bar{E} = E \cup S^1 \times \{\pm 1\}$,

$\bar{F} = S^1 \times [0,1]$.

(b) Ricordiamo che per sottospazi di $\mathbb{R}^n$ vale il teorema di Heine-Borel: $S \subseteq \mathbb{R}^n$ S è compatto se e solo se è chiuso e limitato con la metrica euclidea.

Tutti questi spazi sono contenuti ad esempio in $[-2, 2]^3$ quindi sono limitati.

A, B e D sono chiusi, quindi per HB sono <u>compatti</u> (infatti coincidono con la loro chiusura)

C ed F ed E non sono chiusi, quindi per HB non sono compatti. (non coincidono con la loro chiusura)

A B ed E sono <u>stellati</u> con centro $\underline{0}$: per ogni $\underline{x} \in A/B/E$ $t\underline{x} \in A/B/E$ $\forall t \in [0,1]$ cioè il segmento tra $\underline{x}$ e $\underline{0}$ appartiene all'insieme. Dunque questi spazi sono connessi per archi e quindi connessi.

D è convesso $\Rightarrow$ cpa $\Rightarrow$ connesso.

F è $S^1 \times (0,1)$ $\Rightarrow$ è connesso per archi $\Rightarrow$ connesso

connesso per archi   convesso

Nel punto seguente vedremo che C è omeomorfo ad F quindi abbiamo che è anch'esso connesso per archi.

Per quello che riguarda le proprietà di separazione, osserviamo che ciascuno di questi spazi è metrizzabile, essendo sottospazi di $(\mathbb{R}^3, \tau_e)$ che è metrizzabile.

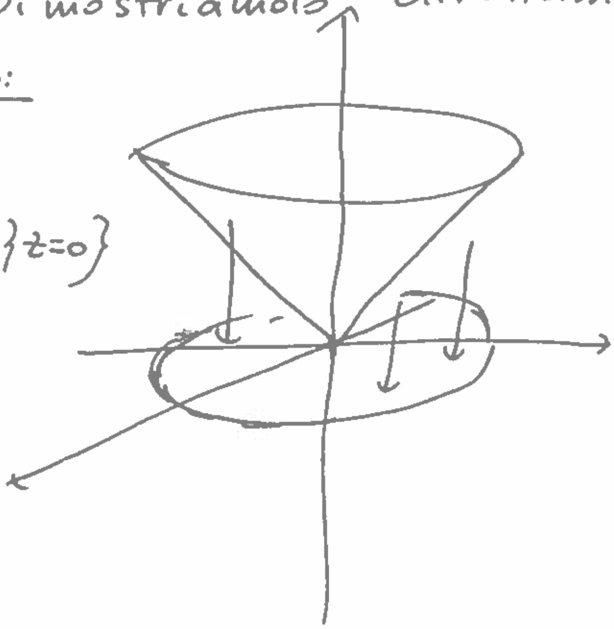
In generale metrizzabile $\Rightarrow$ $T4+T1$ (normale) $\Rightarrow$ $T3+T1$ (regolare) $\Rightarrow T2 \Rightarrow T1 \Rightarrow T0$

Quindi tutti questi spazi hanno ogni proprietà di separazione.

---

c) La compattezza è una proprietà topologica, dunque A, B, D, che sono compatti (come visto in (a)) non sono omeomorfi a C, F ed E che non lo sono.

D'altra parte $A \sim D$. Dimostriamolo direttamente esibendo un omeomorfismo:



$\varphi : A \to D$

$\varphi = P_1|_A$ proiezione sul piano $\{z=0\}$ ristretta ad A

$\varphi(x,y,z) = (x,y,0)$

è continua e suriettiva.

Esibisco l'inversa:

$\psi : D \to A$

$\psi((x,y,0)) := (x, y, \|(x,y)\|)$.

ψ è continua e

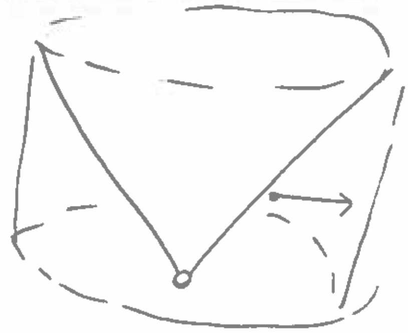
$\psi \circ \varphi(x,y,z) = \psi((x,y,0)) = (x,y,\|(x,y)\|)$

ma poiché $(x,y,z) \in A$ $z^2 = x^2+y^2$ e $z > 0$

e dunque $z = \|(x,y)\|$

e $\varphi \circ \psi((x,y,0)) = \varphi(x,y,0) = (x,y,0)$.

Inoltre $C \simeq F$



considero $\varphi : C \longrightarrow F$ così definita:

$$\varphi(x,y,z) := \left(\frac{(x,y)}{\|(x,y)\|}, z \right) \quad \forall (x,y,z) \in C$$

che è ben definita e continua perché $\underline{0} \notin C$, e

$\psi : F \longrightarrow C$ così definita:

$$\psi(x,y,z) := (zx, zy, z) \quad \forall (x,y,z) \in F$$

ora: $\forall (x,y,z) \in C$

$$\psi \circ \varphi(x,y,z) = \psi\left(\frac{(x,y)}{\|(x,y)\|}, z \right) = \left(\frac{(zx, zy)}{\|(x,y)\|}, z \right) = (x,y,z)$$

ma perché $(x,y,z) \in C$ ho $z = \|(x,y)\|$ dunque

D'altra parte
$\forall (x,y,z) \in F$

$$\varphi(\psi((x,y,z))) = \varphi(zx, zy, z) = \left(\frac{(zx, zy)}{z}, z \right) = (x,y,z)$$

Chiaramente sia φ sia ψ sono continue, dunque sono omeomorfismi.

D'altre parte,

$B \not\approx D$. Infatti, se per assurdo esistesse un omeomorfismo

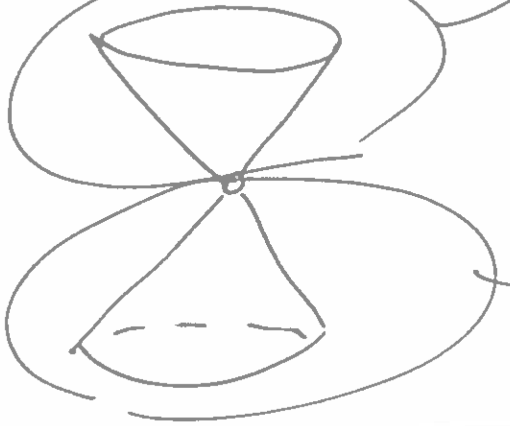
$\varphi : B \longrightarrow D$, in particolare

$\varphi_{|B\setminus\{\underline{0}\}} : B\setminus\{\underline{0}\} \longrightarrow D\setminus\{\varphi(\underline{0})\}$ sarebbe un omeomorfismo.

Ma $B\setminus\{\underline{0}\}$ è sconnesso, mentre $D\setminus\{P\}$ è connesso per ogni $P \in D$. Assurdo

$B\setminus\{\underline{0}\}$ è sconnesso: $B\setminus\{\underline{0}\} = \{(x,y,z)\in B \mid z>0\} \cup \{(x,y,z)\in B \mid z<0\}$

ed entrambi gli insiemi sono aperti e non vuoti in $B\setminus\{\underline{0}\}$



Riassumendo, le classi di omeomorfismo sono:

$\{A, D\}$ $\{B\}$ $\{E\}$ $\{C, F\}$

3) Sia $\mathcal{C}$ la conica di equazione

$$\mathcal{C}: 3x^2+3y^2+2xy+2\sqrt{2}\,x = 0$$

(a) Classificazione euclidea e affine di $\mathcal{C}$.

Matrice associata: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 3 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\det A \neq 0$ quindi la conica è non degenere

Prendo la sottomatrice associata alla parte di grado 2

$A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\det A' = 8 > 0 \Rightarrow$ la conica è un'ellisse

Osserviamo che $(0,0) \in supp(\mathcal{C})$ quindi è un'ellisse a punti reali

La equazione affine canonica è $\boxed{x^2+y^2=1}$

Ora vediamo la classificazione euclidea; nei passaggi troveremo anche il cambiamento di coordinate euclidee necessario affinché $\mathcal{C}$ assuma la forma canonica.

Autovalori ed autovettori di A':

$$P_{A'}(t) = \begin{vmatrix} 3-t & 1 \\ 1 & 3-t \end{vmatrix} = (3-t)^2-1 = t^2-6t+8 = (t-2)(t-4)$$

$V_2 = \{x+y=0\}$ $V_4 = \{x-y=0\}$

Matrice ortogonale tale che $(M')^T A M' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

è $M' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

effettuando il cambio di coordinate $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{-x'+y'}{\sqrt{2}} \end{cases}$

otteniamo come equazione per $\mathcal{C}$ in $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$\mathcal{C}: \ (x,y)A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + 2\sqrt{2}\,x = 0$

$\mathcal{C}: \ (x',y')(M')^T A M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} + \cancel{2}\sqrt{2}\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right) =$

$= 2x'^2 + 4y'^2 + 2x' + 2y' = 0$

ora "completo i quadrati" (trovando così le coordinate del centro)

$2x'^2 + 2x' = 2(x'^2 + x') = 2\left(x' + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$

$4y'^2 + 2y' = 4\left(y'^2 + \frac{y'}{2}\right) = 4\left(y' + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4}$

Dunque prendendo il cambiamento di coordinate

$$\begin{cases} x'' = x' + \frac{1}{2} \\ y'' = y' + \frac{1}{4} \end{cases}$$

ottengo

$\mathcal{C}: \ 2x''^2 + 4y''^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 0$

$2x''^2 + 4y''^2 = \frac{3}{4}$

equazione canonica euclidea:

$$\boxed{\frac{x''^2}{\left(\frac{3}{8}\right)} + \frac{y''^2}{\left(\frac{3}{16}\right)} = 1}$$

(b) Abbiamo già determinato il cambiamento richiesto

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x'+y'}{\sqrt{2}} \\ \frac{-x'+y'}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M'\begin{pmatrix} x''-\frac{1}{2} \\ y''-\frac{1}{4} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x''-\frac{1}{2} \\ y''-\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{x''}{\sqrt{2}} + \frac{y''}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \\ \frac{-x''}{\sqrt{2}} + \frac{y''}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \end{pmatrix} =$$

$$\frac{3}{4\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{8}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{x''}{\sqrt{2}} + \frac{y''}{\sqrt{2}} - \frac{3}{4\sqrt{2}} \\ \frac{-x''}{\sqrt{2}} + \frac{y''}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

(c) $\mathcal{C}: 3x^2+3y^2+2xy+2\sqrt{2}x=0 \quad \subseteq \mathbb{A}^2$

Vedo $\mathbb{A}^2$ come contenuto in $\mathbb{P}^2$ di coord. $[x_0:x_1:x_2]$ come $\mathbb{A}^2 = \{[x_0:x_1:x_2] \mid x_0 \neq 0\}$ e le coordinate affini su $\mathbb{A}^2$

$$x \longleftrightarrow \frac{x_1}{x_0}$$
$$y \longleftrightarrow \frac{x_2}{x_0}$$

L'equazione della chiusura proiettiva è

$$\overline{\mathcal{C}}: 3x_1^2+3x_2^2+2x_1x_2+2\sqrt{2}x_1x_0=0$$

I punti all'infinito di $\overline{\mathcal{C}}$ sono i punti di intersezione di $\overline{\mathcal{E}}$ con la retta all'infinito $\{x_0 = 0\}$: metto a sistema:

$$\begin{cases} 3x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2 + 2\sqrt{2}\, x_1 x_0 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

equivalentemente

$$\begin{cases} 3x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

→ questa è una forma quadratica definita positiva (visto prima!)

Quindi l'unica soluzione del sistema è $x_0 = x_1 = x_2 = 0$

Cioè non esistono punti di $\mathbb{P}^2$ $\quad \overline{\mathcal{E}} \cap \{x_0 = 0\}$

Non ci sono punti impropri.

Questo risultato è in linea con la teoria generale che ci dice che, data ellissi $\overset{\text{non deg}}{\text{in}}$ $\mathbb{A}^2$, essa non ha punti impropri in $\mathbb{P}^2$ mentre un'iperbole non degenere ha 2 punti impropri e una parabola non degenere ne ha 1