Geometria 1 - Prova scritta del 9 luglio 2019

Soluzioni.

1) Vero o falso

(a) $A, B \subseteq X$ connessi

se $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A \cup B$ è connesso

VERO: sia infatti $C \subseteq A \cup B$ un aperto e chiuso non vuoto di $A \cup B$. ($C \in \tau_{X|A\cup B}$ e $A\cup B \setminus C \in \tau_{X|A\cup B}$) voglio vedere che $C = A \cup B$.

Poiché $C \neq \emptyset \Rightarrow A \cap C \neq \emptyset \vee B \cap C \neq \emptyset$

supponiamo $A \cap C \neq \emptyset$ allora $A \cap C$ è aperto e chiuso e non vuoto di A, ma essendo A connesso allora

$A \cap C = A$ cioè $A \subseteq C$.

Allora $B \cap C \supseteq B \cap A \neq \emptyset$

Dunque $B \cap C$ è aperto e chiuso e non vuoto di B

$\underset{B \text{ connesso}}{\Rightarrow}$ $B \cap C = B$

Riassumendo $A \cup B \subseteq C$ dunque $A \cup B = C$ come volevamo.

(b) se A e B sono connessi e $A \cap B = \emptyset$ allora $A \cup B$ è sconnesso.

FALSO: controesempio: su $(\mathbb{R}, \tau_e)$ prendo

$A = (0, 1]$ $\quad B = (1, 2)$ sono intervalli dunque connessi.

$A \cap B = \emptyset$ ma $A \cup B = (0, 2)$ è connesso.

(c) Se A e B sono connessi e $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$ allora $A \cup B$ non è connesso.

(osservate che il controesempio di prima non vale perché $\overline{(0,1]} = [0,1]$ $\quad \overline{(1,2)} = [1,2]$ e $1 \in \overline{(0,1]} \cap \overline{(1,2)}$)

vero : se infatti $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$

allora posso scrivere

$$A \cup B = \Big(\underbrace{\bar{A} \cap (A \cup B)}_{\overset{\shortparallel}{C_1}}\Big) \cup \Big(\underbrace{\bar{B} \cap (A \cup B)}_{\overset{\shortparallel}{C_2}}\Big)$$

$\begin{array}{cc} A & B \\ \cap\!\!| & \cap\!\!| \end{array}$

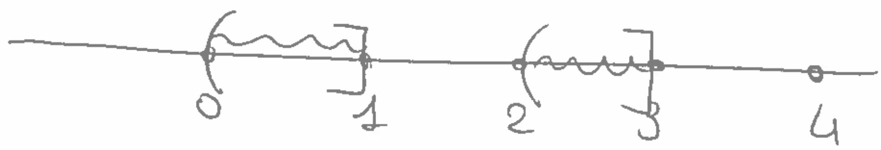
C_1 e C_2 sono due chiusi disgiunti non vuoti.

Dunque $A \cup B$ è sconnesso.

(d) Se A e B non sono connessi allora $A \cup B$ non lo è

FALSO : prendiamo ancora $(\mathbb{R}, \tau_e)$

e consideriamo



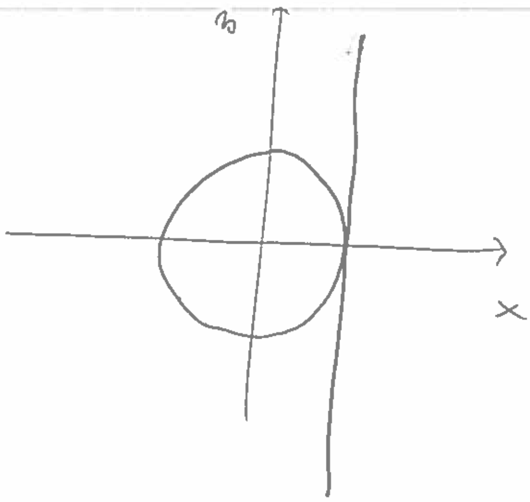
$A = (0,1] \cup (2,3]$

$B = (1,2] \cup (3,4]$

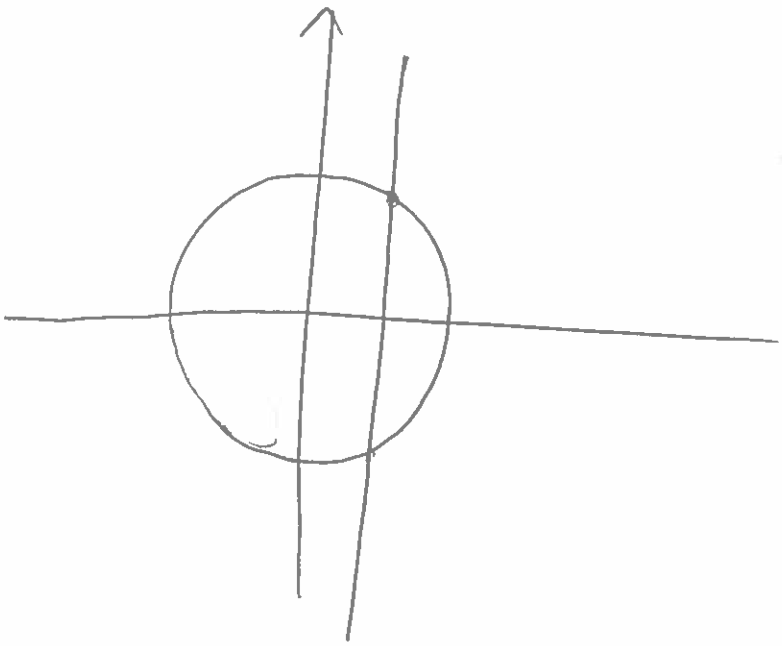
A e B sono sconnessi ma $A \cup B = (0,4]$ è un connesso in $\mathbb{R}$.

2)

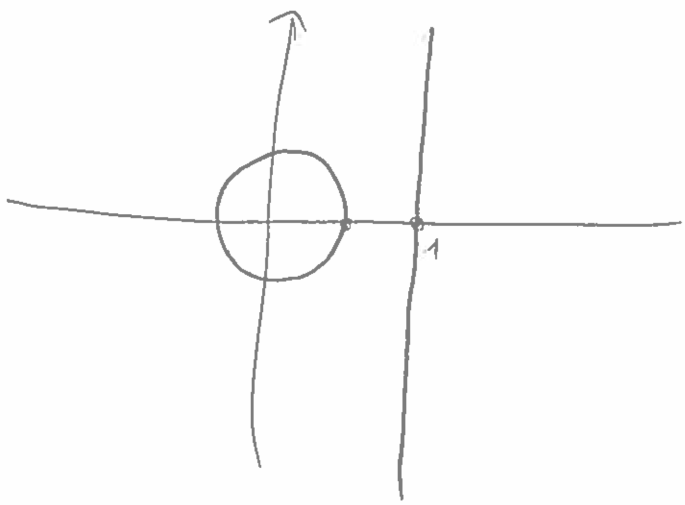
X



Y



Z



(a) X, Y, Z sono tutti spazi <u>illimitati</u> rispetto alla metrica euclidea: $\forall\, y \in \mathbb{R}$ $\quad (1, y) \in X, Y, Z$

dunque $\nexists\, M \in \mathbb{R}^+$ tale che $X / Y / Z \subseteq B_M(\underline{0})$.

Dunque nessuno di loro è compatto per Heine-Borel

Sia r la retta $r: x = 1$

C_s la circonferenza di centro $(\underline{0})$ e raggio $s \in \mathbb{R}^+$

$X = r \cup C_1 \qquad Y = r \cup C_2 \qquad Z = r \cup C_{1/2}$

$r \sim \mathbb{R}$ dunque è connesso (perché cpa)

$C_s \sim S^1$ che è cpa dunque connesso.

se $r \cap C_s \neq \phi$ allora $r \cup C_s$ è connesso (punto del primo esercizio)

$r \cap C_1 = \{(1,0)\} \neq \phi \rightsquigarrow X$ è connesso

dunque ha 1 componente connessa: X stesso

$r \cap C_2 = \{(1,\sqrt{3}), (1,-\sqrt{3})\} \neq \phi \rightsquigarrow Y$ è connesso

e ha Y stesso come componente connessa

$r \cap C_{1/2} = \emptyset$

osservo che in questo caso

è $g^{-1}(1)$ $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $g(x,y) = x$

r è chiuso in Z

è $f^{-1}(0)$ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $x^2+y^2-1/2 = f(x,y)$

e $C_{1/2}$ è chiuso in Z

dunque $Z = r \cup C_{1/2}$ è una decomposizione in chiusi non vuoti disgiunti: Z è sconnesso.

c) $X \not\approx Z$ e $Y \not\approx Z$ perché X e Y sono connessi, Z no e la connessione è una proprietà topologica.

Vediamo che $X \not\approx Y$: se esistesse $\varphi: X \to Y$ omeomorfismo, allora

$$\varphi|_{X \setminus \{(1,0)\}} : X \setminus \{(1,0)\} \longrightarrow Y \setminus \{\varphi(1,0)\}$$

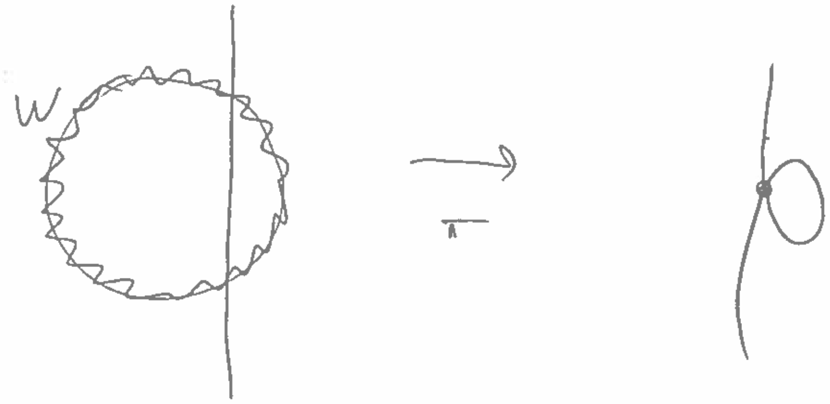
sarebbe un omeomorfismo.

Ma $X \setminus \{(1,0)\}$ ha 3 componenti connesse mentre $Y \setminus \{p\}$, per qualunque $p \in Y$, è connesso oppure ha 2 componenti connesse. Quindi abbiamo un assurdo.

le classi di omeomorfismo sono dunque:

$$\{X\} \quad \{Y\} \quad \{Z\}$$

(d) considero il quoziente Y/W



se considero il segmento $\{1\} \times [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] =: J \subseteq Y$

la mappa quoziente $\pi|_J : J \longrightarrow \pi(J)$

identifica i due estremi $(1, -\sqrt{3})$ e $(1, +\sqrt{3})$

e dunque $\pi(J) \simeq S^1$

D'altra parte $\pi|_{(\{1\} \times [\sqrt{3}, +\infty))}(\{1\} \times [\sqrt{3}, +\infty)) \longrightarrow \pi(\{1\} \times [\sqrt{3}, +\infty))$

è un omeomorfismo

e lo stesso vale per $\pi|_{\{1\} \times (-\infty, -\sqrt{3}]}$

costruisco dunque un omeomorfismo $Y/W \simeq X$

nel seguente modo:

Definisco [scrivo i conti per completezza, non è necessario tutto questo dettaglio all'esame]

$$f: Y \longrightarrow X$$

$$f(x,y) := \begin{cases} (1,\ y-\sqrt{3}) & \text{se } x=1,\ y \geq \sqrt{3} \\ (1,\ y+\sqrt{3}) & \text{se } x=1,\ y \leq -\sqrt{3} \\ \left(\cos\left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}} t\right),\ \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}} t\right)\right) & \text{se } x=1,\ y \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \\ (0,0) & \text{se } (x,y) \in C_2 \end{cases}$$

come si vede dal lemma di incollamento, f è continua perché è definita su chiusi di Y e continua e si incolla bene sulle intersezioni

Considero il diagramma

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & X \\ Y/W \arrow[ur, "\exists h"'] & \end{tikzcd}$$

poiché f è costante sulle classi di equivalenza di π esiste h continua $h: Y/W \longrightarrow X$ tale che

$$f = h \circ \pi$$

D'altra parte vedo subito che f è chiusa (perché è incollamento di applicazioni chiuse su chiusi di Y) dunque h è chiusa per la proprietà universale

$\Longrightarrow$ h è biiettiva continua e chiusa: è un omeomorfismo

Sia $\mathcal{C}: 2x^2+2xy+2y^2+y-1=0$ in $\mathbb{E}^2$ con un sistema di riferimento cartesiano $O\,\underline{i}\,\underline{j}$

troviamo che tipo di conica è $\mathcal{C}$:

Matrice associata:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det A = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1/2 & 1 \end{vmatrix} = -3 + \frac{1}{2}(-1) =$$

$$= -7/2 \neq 0$$ è una conica non degenere

A'

matrice associata alla parte quadratica è

$$A' = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \det A' = 3 > 0$$

dunque la conica è un'ellissi non degenere

Osserviamo che ponendo $y=0$ e $x = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$ otteniamo una soluzione dunque la conica è un'ellissi non degenere a punti reali.

La equazione canonica affine è

$$\boxed{X^2+Y^2=1}$$

Calcoliamo le coordinate del centro di simmetria di $\mathcal{C}$:

devo trovare la soluzione del sistema

$$A'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{01} \\ a_{02} \end{pmatrix} = 0$$

cioè

$$\begin{cases} 2x + y + 0 = 0 \\ x + 2y + 1/2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -2x \\ x - 4x + 1/2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2x \\ 3x = 1/2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -1/3 \\ x = 1/6 \end{cases}$$

(osserviamo che in effetti nel cambio di coordinate ho proprio traslato l'origine nel centro di simmetria).

che scriviamo in seguito

(b) per trovare la equazione canonica euclidea, prima portiamo in forma canonica la parte quadratica $q(x,y) = 2x^2+2y^2+2xy$

A' ha come autovalori 1 e 3

$V_1 = \text{span}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad V_3 = \text{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Dunque il cambiamento di coordinate cartesiane

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

diagonalizza la parte quadratica:

$\mathcal{C}$ nelle nuove coordinate $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ ha equazione:

$$1(x')^2 + 3(y')^2 + \left(-\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}\right) - 1 = 0$$

$$x'^2 + 3y'^2 - \frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}} - 1 = 0$$

ora completo i quadrati, ponendo

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'' + \frac{\sqrt{2}}{4} \\ y'' - \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\text{[illegible]}}{3} \end{pmatrix}$$

otteniamo la nuova equazione per $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{C}: \; x''^2 + 3y''^2 + \frac{1}{8} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8} - \frac{1}{4} - \frac{1}{12} - 1 = 0$$

$$x''^2 + 3y''^2 - \frac{7}{6} = 0$$

$$x''^2 + 3y''^2 = \frac{7}{6}$$

equazione canonica euclidea:

$$\frac{x''^2}{(7/6)} + \frac{y''^2}{(7/18)} = 1$$

(dunque riottengo che $\mathcal{C}$ è a punti reali)

cambiamento di coordinate che porta in forma canonica:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}^{M} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' + \frac{\sqrt{2}}{4} \\ y'' - \frac{\sqrt{2}}{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{12} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{x''}{\sqrt{2}} + \frac{y''}{\sqrt{2}} + \frac{1}{6} \\ -\frac{x''}{\sqrt{2}} + \frac{y''}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

(c) La chiusura proiettiva di $\mathcal{C}$ è la conica di $\mathbb{P}^2$ che ha equazione ottenuta omogeneizzando l'equazione di $\mathcal{C}$ in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ pensiamo $[x_0, x_1, x_2]$ le coordinate proiettive e pongo $x = \frac{x_1}{x_0}$ $y = \frac{x_2}{x_0}$

$$\overline{\mathcal{C}} : 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_0x_2 + x_0^2 = 0$$

I punti impropri di $\overline{\mathcal{C}}$ sono i punti di intersezione di $\overline{\mathcal{C}}$ con la "retta all'infinito" $x_0 = 0$: non ne dovrei avere perché in generale se prendo la chiusura proiettiva di un'ellisse non ho punti reali (di una parabola ne ho 1 di un'iperbole ne ho 2 — nel caso non degenere)

Controllo: $\begin{cases} x_0 = 0 \\ 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_0x_2 + x_0^2 = 0 \end{cases}$

$$(*) \begin{cases} x_0 = 0 \\ \underbrace{2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2}_{} = 0 \end{cases}$$

questa è una forma quadratica definita positiva (ha autovalori 1 e 3) dunque è uguale $= 0$ se e solo se $x_1 = x_2 = 0$

Quindi nessun punto di $\mathbb{P}^2$ è soluzione di $(*)$ $\boxtimes$