<u>ESERCIZI sull'OMOLOGIA SIMPLICIALE a.a. 2015-2016</u>

Lidia Stoppino

Corso di Istituzioni di Geometria Superiore, Università dell'Insubria

1. (Fatto in classe. Munkres Chap. 1, Sec. 2 Example 2) Sia $\mathcal{K}$ il complesso simpliciale in R così definito: prendiamo come 1-simplessi in $\mathcal{K}$ la collezione $[-1,0] \subset \mathbb{R}$ e $\{[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}], n \in \mathbb{N}^+\}$. Come 0-simplessi in $\mathcal{K}$ prendiamo tutte le facce di questi simplessi. Verificare che
   (a) $\mathcal{K}$ è un complesso simpliciale il cui spazio soggiacente insiemisticamente è $[-1,1] \subset \mathbb{R}$.
   (b) La topologia della realizzazione s̀u $|\mathcal{K}|$ e strettamente più fine di quella euclidea.
   (c) $|\mathcal{K}|$ è compatto?
2. (Munkres Ch.1. Sec. 2) Sia $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}$ un sottocomplesso di un complesso $\mathcal{K}$. Dimostrare che $|\mathcal{L}| \subseteq |\mathcal{K}|$ è un sottospazio chiuso.
3. (Munkres Ch.1. Sec.2) Mostrare che in generale $St(w)$ e $\overline{St(w)}$ sono connessi per archi.
4. (Munkres Ch.1. Sec.2) Sia $\mathcal{K}$ un complesso simpliciale. Sia $\sigma \in \mathcal{K}$ un suo simplesso. Quando σ è aperto in $|\mathcal{K}|$?
5. (Fatto in classe) Sia $\mathcal{K}$ un complesso simpliciale. Dimostrare che $|\mathcal{K}|$ è T2.
6. (Munkres Ch.1. Sec.2) Sia $\mathcal{K}$ un complesso simpliciale. Dimostrare che $|\mathcal{K}|$ è normale (cioè è T2 e gli aperti separano i chiusi disgiunti).
7. (Fatto in classe- Munkres Ch.1. Sec.2) Sia $\mathcal{K}$ un complesso simpliciale in $\mathbb{R}^m$. Dimostrare che $|\mathcal{K}|$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^m$ se e solo se ogni punto $x \in |\mathcal{K}|$ sta in un aperto che interseca solo un numero finito di simplessi di $\mathcal{K}$.
8. Dimostrare che una applicazione $f\colon |\mathcal{K}| \to X$ in uno spazio topologico X è continua se e solo se $f_{|\sigma}$ è continua per ogni $\sigma \in \mathcal{K}$.
9. Verificare che la composizione di mappe simpliciali è una mappa simpliciale.

10. Calcolare l'omologia simpliciale di un complesso composto da una solo veritice (spazio topologico associato un singoletto). Calcolare l'omologia simpliciale di un complesso composto da un numero finito di vertici e nessun altro simplesso in dimensione superiore (spazio topologico associato un'unione finita di punti).

11. Si consideri il complesso $\mathcal{R}$ in figura (1) (con le identificazioni dei bordi indicate- si noti che lo spazio topologico sottostante è $\mathbb{RP}^2$)

    (a) Calcolare esplicitamente i gruppi di omologia;

    (b) Verificare che $\mathcal{R}$ non è orientabile.

12. Dato il complesso $\mathcal{K}$ rappresentato in figura (2), sia B il suo bordo. Dimostrare che

    (a) ogni 1-ciclo di $\mathcal{K}$ è omologo ad un 1-ciclo supportato su B;

    (b) se d è una 2-catena il cui bordo è supportato su B, fissando i 2-simplessi $\sigma_1, \ldots, \sigma_{18}$ di $\mathcal{K}$ con orientazione antioraria,

    $$d = \alpha \sum_{i=1}^{18} \sigma_i$$

    per qualche $\alpha \in \mathbb{Z}$.

13. (Esercizio 2 munkres Chap.1 sec.11). Si considerino le figure piane con lati identificati come indicati in figura (3).

    (a) Costruire dei complessi che abbiano quegli spazi topologici come spazi associati.

    (b) Calcolarne i gruppi di omologia.