Esame di Istituzioni di Geometria Superiore

Università dell'Insubria

22 febbraio 2019

1. (a) Definire un rivestimento, un sollevamento di una applicazione ed enunciare il teorema di sollevamento delle mappe.

   (b) Si consideri la seguente applicazione dal toro in sè stesso: $p\colon S^1 \times S^1 \to S^1 \times S^1$ $p(z,w) = (z^2, w^3)$ (in notazioni coplesse $S^1 \subset \mathbb{C}$). È un rivestimento? Di che grado? Si calcoli $p_*(\pi_1(S^1 \times S^1(1,1))$ e si verifichi il legame con l'indice di questo sottogruppo. *[4 punti]*

   (c) Si considerino le seguente applicazioni $f, g\colon S^1 \to S^1 \times S^1$, $f(v) := (v, v^3)$ e $g(v) := (1, v^3)$. Stabilire se si sollevano tramite p e in caso positivo scrivere esplicitamente dei sollevamenti. *[4 punti]*

   (d) Si considerino le corrispondenti applicazioni dall'intervallo unitario $I = [0,1]$ $\overline{f}, \overline{g}\colon I \to S^1 \times S^1$ $\overline{f}(t) := (e^{2\pi i t}, e^{6\pi i t})$ e $\overline{g}(t) := (1, e^{6\pi i t})$. Queste applicazioni si sollevano tramite p? Perché? *[4 punti]*

2. Si consideri la figura piana coi lati identificati come in figura, che chiamiamo X.

   (a) Si enunci il teorema di classificazione delle superfici topologiche.

   (b) Se ne calcoli il gruppo fondamentale. È un gruppo abeliano? *[5 punti]*

   (c) X è una superficie topologica? Spiegare perché, e in caso positivo classificarla. *[5 punti]*

3. (a) Definire un complesso simpliciale. Si consideri il complesso $\mathbb{K}_\sigma$ associato ad un simplesso e δK_σ il complesso associato al bordo del simplesso. Scrivere quanto vale l'omologia.

   (b) Sia $\mathcal{K}$ il complesso simpliciale finto in $\mathbb{R}^3$composto di 4 vertici $v_0, \ldots, v_3$, 6 1-simplessi $[v_0, v_1]$, $[v_0, v_2]$, $[v_0, v_3]$, $[v_1, v_2]$, $[v_1, v_3]$, $[v_2, v_3]$ e un 3-simplesso $[v_0, v_1, v_2]$.

   (c) Calcolare i gruppi di omologia simpliciale di $\mathcal{K}$ esplicitamente. *[6 punti]*

   (d) Giustificare i risultati sull H_0 e sull'H_1 usando i risultati generali che legano la topologia di $|\mathcal{K}|$ alla sua omologia. *[4 punti]*