<u>ESERCIZI 1 a.a. 2017-2018</u>

Lidia Stoppino

Corso di Istituzioni di Geometria Superiore, Università dell'Insubria

1. (fatto in classe) Sia $X = C_1 \cup C_2 \subset \mathbb{R}^2$ la figura ad otto, dove

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 = 1\},$$

$$C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 = 1\},$$

e $x_0 := (0, 0) = C_1 \cap C_2$. Siano $\alpha\colon I \to C_1$ e $\beta\colon I \to C_2$ due generatori dei gruppi fondamentali $\pi_1(C_1, x_0)$ e $\pi_1(C_2, x_0)$ rispettivamente. Siano $U := X \setminus \{(2, 0)\} \overset{i}{\hookrightarrow} X$, $V := X \setminus \{(-2, 0)\} \overset{j}{\hookrightarrow} X$.

   (a) Dimostrare che il gruppo fondamentale $\pi_1(X, x_0)$ è generato dalle classi $i_*[\alpha]$ e da $j_*[\beta]$.

   (b) Dimostrare che gli omomorfismi indotti $i_*\colon \pi_1(U, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ e $j_*\colon \pi_1(V, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ sono iniettivi.

   (c) Dimostrare che $(i \circ \alpha) \not\sim (j \circ \beta)$ in $X$.

   (d) Dimostrare che $(i \circ \alpha) \star (j \circ \beta) \not\sim (j \circ \beta) \star (i \circ \alpha)$ in $X$. [Eventualmente questo segue dal Teorema di Seifert-Van Kampen]

2. Dimostrare che ogni gruppo $G$ è isomorfo al gruppo $\langle S_G | R_G \rangle$ dove $S_G = G$ e $R_G = \{(xy)y^{-1}x^{-1}, x, y \in G\}$.

3. Sia $G = \langle S \mid R \rangle$ un gruppo presentato con generatori e relazioni; definiamo il gruppo

$$AG := \langle S \mid AR \rangle,\ AR = R \cup \{xyx^{-1}y^{-1} | x, y \in S\}.$$

   Dimostrare che AG è un gruppo abeliano (l'abelianizzazione di $G$) e che esiste un omomorfismo suriettivo $G \to AG$. Determinare inoltre il nucleo di tale omomorfismo (è il derivato di $G$).

4. Si considerino i due gruppi $G := \langle a, b \mid baba^{-1} \rangle$ e $H := \langle x, y \mid x^2y^2 \rangle$. Dimostrare che l'applicazione $f\colon \{x, y\} \to G$ così definita: $f(x) := a$, $f(y) := ba^{-1}$ si estende a un isomorfismo $G \to H$.

5. Qual'è l'ordine del gruppo $\langle a, b \mid a^4, a^2b^{-2}, a^3ba^{-1}b^{-1} \rangle$?

6. Dimostrare che il gruppo $G = \langle a, b \mid a^4, b^2, aba^{-1}b^{-1} \rangle$ è isomorfo $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/4$. Dimostrare che $G$ è l'abelianizzato di $G' = \langle a, b \mid a^4, b^2 \rangle$. Stabilire se $G'$ è un gruppo finito.

7. (fatto in classe) Dimostrare che il gruppo $G = \langle a, b | a^{-1}ba = b^2, b^{-1}ab = a^2 \rangle$ è il gruppo banale.

8. Dimostrare che il gruppo $G = \langle a, b | a^4ba^{-3}b^{-1}, a^5b^2a^{-4}b^{-2} \rangle$ non è il gruppo banale.

9. (Kos 24.4(b)) Determinare il gruppo fondamentale del seguente sottospazio di $\mathbb{R}^2$:
$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq x \leq 1, x, y \in \mathbb{Z}\}.$$

10. (Kos 24.4(c)) Sia $Y$ il complementare del seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$: $\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Z}\}$. Dimostrare che il gruppo fondamentle $\pi_1(Y, (1, 1))$ è un gruppo libero su un'infinità numerabile di generatori.

11. Calcolare il gruppo fondamentale dello spazio quoziente $X = T/C$ ottenuto contraendo a un punto il sottospazio $C = S^1 \times \{1\}$ del toro $T = S^1 \times S^1 \subset \mathbb{C}^2$.

12. (Kos 24.4(d)) Calcolare il gruppo fondamentale $\pi_1(X, x_0)$ di uno spazio di Hausdorff $X = A \cup B$, dove $A$ e $B$ sono entrambi omeomorfi a un toro e $A \cap B = \{x_0\}$.

13. Calcolare il gruppo fondamentale della sfera 2-dimensionale $S^2$ privata di $n$ punti distinti.

14. Calcolare il gruppo fondamentale del toro 2-dimensionale $T$ privato di $n$ punti distinti.

15. (Kos 24.4(j)) Sia $x \in \mathbb{RP}^2$. Dimostrare che il gruppo fondamentale di $\mathbb{RP}^2 \setminus \{x\}$ è isomorfo a $\mathbb{Z}$.

16. (Munk 11.70.1) Nelle ipotesi e notazioni del teorema di Seifert-Van Kampen, supponiamo che l'omomorfismo $i_*$ indotto dall'inclusione $i\colon U \cap V \to X$ sua banale.

    (a) Dimostrare che le inclusioni $j_1\colon U \to X$ e $j_2\colon V \to X$ inducono un omomorfismo suriettivo
    $$h\colon (\pi_1(U, x_0)/N_1) \star (\pi_1(V, x_0)/N_2),$$
    dove $N_1$ è la chiusura normale di $(i_1)_*(\pi_1(U \cap V, x_0))$ in $\pi_1(U, x_0)$, e $N_2$ è la chiusura normale di $(i_2)_*(\pi_1(U \cap V, x_0))$ in $\pi_1(V, x_0)$.

    (b) Mostrare che $h$ è un isomorfismo.

17. (Munk 11.70.2) Nelle ipotesi e notazioni del teorema di Seifert-Van Kampen, supponiamo che $(i_2)_*$ sia un omomorfismo suriettivo.

    (a) Mostrare che $j_1$ induce un omomorfismo suriettivo $h\colon \pi_1(U, x_0)/M \to \pi_1(X, x_0)$, dove $M$ è la chiusura normale di $(i_1)_*(\ker(i_2)_*)$ (suggerimento: mostrate che $(j_1)_*$ è suriettivo).

    (b) Mostrare che $h$ è un isomorfismo.

18. Dimostrare che l'unica varietà compatta connessa di dimensione 1 è $S^1$.

19. (La lingua biforcuta- Manetti Es.5.8: l'ipotesi T2 nella definizione di varietà topologiche è necessaria). Sia $B$ un insieme con due elementi dotato della topologia discreta. Sullo spazio topologico $X = R \times B$ definiamo la relazione di equivalenza

$$(x, a) \sim (y, b) \text{ se } (x, a) = (y, b) \text{ oppure se } x = y < 0.$$

  (a) Provare che $X/\sim$ è unione di due aperti omeomorfi a $\mathbb{R}$ e che non è di Hausdorff

  (b) provare che $X/\sim$ è a base numerabile.

20. (Altro esempio che mostra che l'ipotesi T2 nella definizione di varietà topologiche è necessaria). Sia $X = [-1, 2]$. Consideriamo la famiglia di sottoinsiemi di $X$.

$$\mathcal{A} = \{(a, b), -1 \leq a \leq b \leq 2\} \cup \{(a, 0) \cup (b, 2], -1 \leq a < 0, -1 \leq b < 2\}.$$

Dimostrare che:

  (a) $\mathcal{A}$ è una base per la topologia di $X$, che induce una topologia $\mathcal{T}$ strettamente meno fine di quella euclidea su $X$.

  (b) $(X, \mathcal{T})$ è T0 ma non è T2.

  (c) Ogni punto di $X$ ha in $\mathcal{T}$ un intorno aperto omeomorfo a $\mathbb{R}$.

  (d) $X$ è a base numerabile.

21. (Manetti esercizio 6.6: l'ipotesi di 2-numerabile nella definizione di varietà topologica è necessaria) Consideriamo una famiglia di copie disgiunte $\mathbb{R}_a$ della retta reale parametrizzate da $a \in (-\pi/2, \pi/2)$ e le applicazioni continue

$$f_a \colon (\mathbb{R}_a \setminus \{0\}) \times (-1, 1) \to \mathbb{R}^2,$$

$$f_a(x, t) := \left( \frac{\cos a}{x} - t \sin a, \frac{\sin a}{x} + t \cos a \right).$$

Indichiamo con $X$ il quoziente topologico dell'unione disgiunta di $\mathbb{R}^2$ e di tutte le strisce $\mathbb{R}_a \times (-1, 1)$:

$$X = \frac{\mathbb{R}^2 \cup \cup_a(\mathbb{R}_a \times (-1, 1))}{\sim},$$

dove $\sim$ è la più piccola relazione di equivalenza tale che $(x, t) \sim f_a(x, t)$, per $(x, t) \in (\mathbb{R}_a \setminus \{0\}) \times (-1, 1)$. Dimostrare che:

  (a) $X$ è connesso, separabile, di Hausdorff ed ogni punto possiede un intorno aperto omeomorfo a $\mathbb{R}^2$.

(b) $X$ contiene un sottoinsieme discreto di cardinalità più che numerabile. In particolare $X$ non è a base numerabile.

(c) $X$ non è unione numerabile di compatti.

22. Dimostrare che ogni $n$-varietà topologica compatta e connessa è omeomorfa a un sottospazio di $\mathbb{R}^m$ per qualche $m$ (esercizio 11.2 (f) Kosniowski).

23. Dimostrare che $T\sharp\mathbb{RP}^2 \sim \mathbb{RP}^2\sharp\mathbb{RP}^2\sharp\mathbb{RP}^2$, dove $\sharp$ indica la somma connessa, $T$ è il toro e $\mathbb{RP}^2$ il piano proiettivo.

24. Dimostrare che $K \sim \mathbb{RP}^2\sharp\mathbb{RP}^2$, dove $K$ è la bottiglia di Klein.

25. Esibire una triangolazione di $S^2$, del toro $T$, del piano proiettivo $\mathbb{RP}^2$ e della bottiglia di Klein $K$. Trovare una triangolazione della striscia di Möbius $M$ (cioè un complesso simpliciale di dimensione 2 il cui spazio topologico associato sia omeomorfo a $M$).

26. Sia $C$ una corona circolare chiusa in $\mathbb{R}^2$. Siano $C_1, C_2$ le componenti connesse del bordo (che sono omeomorfe a $S^1$). Stabilire che superfici topologiche si ottengono identificando $C_1$ a $C_2$ nei due modi possibili.

27. Si considerino le figure piane in figura (1) con l'identificazione dei bordi indicate. Si stabilisca se sono superfici topologiche e si trovi il gruppo fondamentale.

28. Si considerino le figure piane in figura (2) con l'identificazione dei bordi indicate. Si stabilisca se sono superfici topologiche e si trovi il gruppo fondamentale.

29. Classificare le superfici topologiche ottenute identificando a due a due i lati del quadrato $[-1,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ in tutti i modi possibili. Stessa cosa con un poligono piano esagonale $P_6$ (è un po' lungo).

30. Una *curva semplice* in uno spazio topologico $X$ è l'immagine di $S^1$ tramite una applicazione iniettiva. Sia $T$ il toro.

    (a) Dimostrare che esistono due curve semplici chiuse $C_1$ e $C_2$ in $T$ tali che il complementare
    $T \setminus \{C_1 \cup C_2\}$ è connesso.

    (b) Esistono due curve semplici chiuse $C_1$ e $C_2$ in $T$ *disgiunte* tali che il complementare $T \setminus \{C_1 \cup C_2\}$ è connesso?

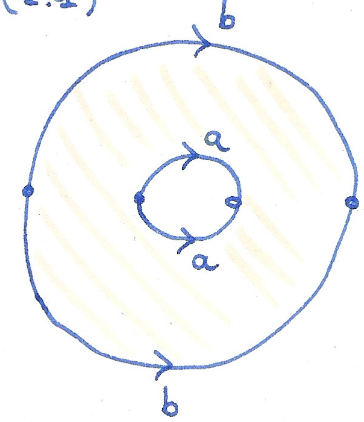
    (c) Dimostrare che non esistono tre curve semplici chuse in $T$ tali che il complementare $T \setminus \{C_1 \cup C_2 \cup C_3\}$ è connesso.

    (d) Provare a generalizzare il ragionamento a superfici orientabili di genere $g$ arbitrario.

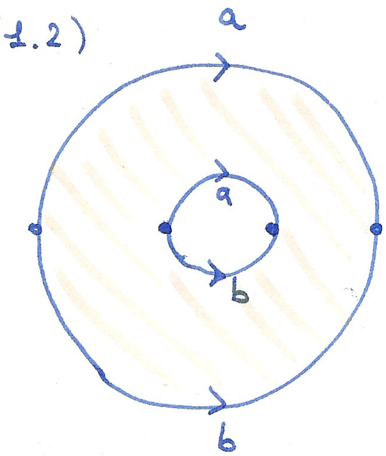
31. Dimostrare che un'azione libera di un gruppo finito su uno spazio di Hausdorff è propriamente discontinua.

## Figura (1)

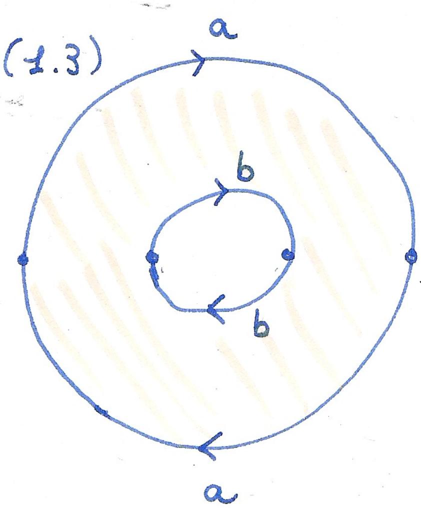
(1.1)




(1.2)

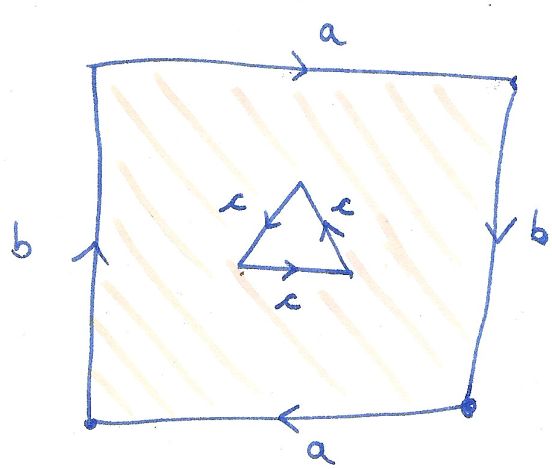



(1.3)




## Figura (2)

(2.1)




(2.2)