ESERCIZI 2 a.a. 2017-2018

Lidia Stoppino

Corso di Istituzioni di Geometria Superiore, Università dell'Insubria

1. Sia $p: \widetilde{X} \to X$ un rivestimento. Sia $S \subset X$ un sottospazio. Sia $\widetilde{S} := p^{-1}(S)$. Mostrare che la restrizione $p_{|\widetilde{S}}: \widetilde{S} \to S$ è un rivestimento.

2. Sia $p: \widetilde{X} \to X$ un rivestimento con $\widetilde{X}$ connesso per archi. Dimostrare che se X è semplicemente connesso allora p è un omeomorfismo.

3. Sia $p: \widetilde{X} \to X$ un rivestimento con X connesso per archi e localmente connesso per archi. Mostrare che se $C \subseteq \widetilde{X}$ è una componente connessa, allora $p(C) = X$ (sugg: mostrare che $p(C)$ è sia aperto sia chiuso in X). Mostrare altresì che la restrizione $p_{|C}: C \to X$ è un rivestimento.

4. (Fatto in classe) Sia X il sottospazio di $\mathbb{R}^2$ così definito: $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ dove $X_1 = \{0\} \times [-1, 1]$, X_2 è il "seno del topologo":

$$X_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, \sin(1/x)), x \in (0, 1/\pi]\},$$

e X_3 è un arco che connette i punti $(0, 0)$ e $(1/\pi, 0)$ (e che non interseca X_1 e X_2).

(a) Dimostrare che X è connesso per archi e che il suo gruppo fondamentale è banale.

(b) Si consideri la mappa su $Y := [0, 1/\pi] \times \{0\} \cup X_3$ data dalla contrazione al punto $(0, 0)$ di X_1, la proiezione di X_2 su $\{0\} \times (0, 1/\pi]$, e l'identità su X_3. Lo spazio Y è omeomorfo a S^1 (verificare), e dunque abbiamo una mappa indotta $f: X \to S^1$. Dimostrare che la mappa f non si solleva a una mappa $X \to \mathbb{R}$ sul rivestimento universale di S^1.

5. Sia $f: S^1 \to T = S^1 \times S^1$ data da $f(z) = (z^2, 1)$. Trovare un rivestimento non banale di T tale che f ammetta (risp. non ammetta) un sollevamento.

6. Sia $n \geq 2$ un intero. Dimostrare che ogni applicazione continua $f: S^n \to S^1$ è omotopa ad un'applicazione costante (sugg: usare il lemma di sollevamento).

7. Mostrare che se $p_1: \widetilde{X}_1 \to X_1$ e $p_2: \widetilde{X}_2 \to X_2$ sono due rivestimenti, allora $p_1 \times p_2: \widetilde{X}_1 \times \widetilde{X}_2 \to X_1 \times X_2$ è un rivestimento.

8. Sia $p: \widetilde{X} \to X$ un rivestimento con $\widetilde{X}$ connesso per archi. Trovare il gruppo fondamentale di $\widetilde{X}$ supponendo che il gruppo fondamentale di X sia isomorfo a $\mathbb{Z}$ e che la fibra abbia cardinalità finita.

9. Sia X l'incollamento in un punto di S^2 con S^1: $X = S^2 \vee S^1$.

(a) Classificare tutti i rivestimenti connessi di X.

(b) Si considerino le seguenti applicazioni continue $f, g: S^1 \longrightarrow X$:

- f è ottenuta componendo la mappa

$$z \in S^1 \mapsto z^6 \in S^1 \quad \text{(visti come sottospazi di } \mathbb{C})$$

con l'inclusione $S^1 \subset X$.

- Consideriamo $\overline{\gamma}\colon S^1 \to S^2$ indotta dalla mappa $\gamma\colon [0,1] \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$ così definita:

$$\gamma(t) := (0, \cos(2\pi t), \sin(2\pi t)),$$

e g si ottiene componendo con l'inclusione $S^2 \subset X$.

Quali sono i rivestimenti connessi $\widetilde{X}$ di X tali che f ammetta un sollevamento $\widetilde{f}\colon S^1 \longrightarrow \widetilde{X}$? Stessa domanda per la mappa g.

10. (Fatto in classe) Dimostrare che uno spazio semplicemente connesso è semi-localmente semplicemente connesso.

11. Dimostrare che una varietà topologica connessa M è localmente connessa per archi e semi-localmente semplicemente connessa. Dimostrare inoltre che se $p\colon \widetilde{M} \to M$ è il rivestimento universale di M, $\widetilde{M}$ è ancora una varietà topologica.

12. Siano X e Y le figure piane con l'identificazione dei lati illustrata in figura (2).

13. Costruire dei rivestimenti del toro T associati ai sottogruppi di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cong \pi_1(T, x_0)$ generati da:

    (a) $(0, 0)$;

    (b) $(0, m)$ per $m \in \mathbb{N}$;

    (c) $(1, m)$ per $m \in \mathbb{N}$.

    Calcolarne l'ordine, e provare a disegnarli.

14. Esistono rivestimenti non normali del toro?

15. Si considerino i due omeomorfismi (che tra l'altro sono isometrie) di $\mathbb{R}^2$ così definite: $\varphi(x, y) := (x+\frac{1}{2}, -y)$, $\psi(x, y) := (x, y+1)$. Si consideri il sottogruppo G degli omeomorfismi di $\mathbb{R}^2$ generato da φ e ψ.

    (a) Dimostrare che G agisce in modo propriamente discontinuo su $\mathbb{R}^2$.

    (b) Dimostrare che il quoziente è omeomorfo alla bottiglia di Klein.

    (c) Si consideri il sottogruppo G' di G generato da ψ e φ^2 (che ha indice due in G). Dimostrare che questo sottogruppo è isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

    (d) Dimostrare che a G' è associato a un riverstimento doppio del toro sulla bottiglia di Klein.

16. Dato un gruppo G e un suo sottogruppo $H < G$, il normalizzante $N(H)$ di H è il sottogruppo

$$N(H) := \{g \in G \mid gH = Hg\}.$$

Dimostrare che $N(H)$ è il più grande sottogruppo di G tale che H è normale in $N(H)$. (ovviamente H è normale se e solo se $N(H) = G$). Sia $p\colon \widetilde{X} \to X$ un rivestimento con $\widetilde{X}$ connesso e cpa. Siano $x_0 \in X$, e $\widetilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, e sia $H = p_*(\pi_*(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)) \subseteq \pi_1(X, x_0)$ il sottogruppo associato.

    (a) Dimostrare che $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ è nel normalizzante di H se e solo se esiste una trasformazione del rivestimento $\varphi\widetilde{X} \to \widetilde{X}$ tale che $\varphi(\widetilde{x}_0) = \widetilde{x}_1$ dove $\widetilde{x}_1$ è il punto finale del sollevamento di α con punto iniziale $\widetilde{x}_0$.
    (b) Dimostrare che il gruppo delle trasformazioni del rivestimento $G(\widetilde{X})$ è isomorfo al quoziente $N(H)/H$ (sugg: definire un omomorgismo di gruppi $h\colon N(H) \to G(\widetilde{X})$ mandando $[\alpha]$ nella trasformazione del rivestimento definita nel punto precedente. Dimostrare che h è suriettivo e che il suo nucleo è H.
    (c) Dedurre in particolare che $G(\widetilde{X})$ è isomorfo a $\pi_1(X, x_0)/H$ se X è un rivestimento normale.

17. Costruire il rivestimento universale del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ formato dall'unione della sfera e di un suo diametro.

18. Costruire il rivestimento universale del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ formato dall'unione della sfera e di una circonferenza che la intersechi in due punti.

19. (Fatto in classe ma ne potete pensare altri) Fare un esempio di un rivestimento (connesso) non normale della figura a otto.

20. Costruire il rivestimento universale di $\mathbb{RP}^2 \vee S^1$ e di $\mathbb{RP}^2$ unito un arco che unisce due punti distinti.