ESERCIZI 3- 2017-18

Lidia Stoppino
Corso di Istituzioni di Geometria Superiore, Università dell'Insubria

1. Esibire una triangolazione di S^2, del toro T, del piano proiettivo $\mathbb{RP}^2$ e della bottiglia di Klein K, della striscia di Möbius M, del cilindro $S^1 \times I$.

2. Dimostrare che se $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$ sono sottocomplessi del complesso simpliciale $\mathcal{K}$, anche $\mathcal{L} \cap \mathcal{M}$ e $\mathcal{L} \cup \mathcal{M}$ sono sottocomplessi di $\mathcal{K}$.

3. (Munkres Ch.1. Sec. 2) Sia $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}$ un sottocomplesso di un complesso $\mathcal{K}$. Dimostrare che $|\mathcal{L}| \subseteq |\mathcal{K}|$ è un sottospazio chiuso.

4. (Fatto in classe. Munkres Chap. 1, Sec. 2 Example 2) Sia $\mathcal{K}$ il complesso simpliciale in R così definito: prendiamo come 1-simplessi in $\mathcal{K}$ la collezione $[-1, 0] \subset \mathbb{R}$ e $\{[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}], n \in \mathbb{N}^+\}$. Come 0-simplessi in $\mathcal{K}$ prendiamo tutte le facce di questi simplessi. Verificare che

   (a) $\mathcal{K}$ è un complesso simpliciale il cui spazio soggiacente insiemisticamente è $[-1, 1] \subset \mathbb{R}$.

   (b) La topologia della realizzazione ùsu $|\mathcal{K}|$ e strettamente più fine di quella euclidea.

   (c) $|\mathcal{K}|$ è compatto?

5. Dimostrare per un complesso simpliciale *finito* in $\mathbb{R}^N$, la topologia della realizzazione coincide con quella euclidea.

6. (Munkres Ch.1. Sec.2) Dimostrare che dato un complesso simpliciale in $\mathbb{R}^N$, la topologia della realizzazione coincide con quella euclidea se e solo se vale che: per ogni $x \in |\mathcal{K}|$ eisste U aperto in $\mathbb{R}^N$ tale che U interseca in modo non banale un numero finito di simplessi di $\mathcal{K}$.

7. (Munkres Ch.1. Sec.2) Mostrare che in generale $St(w)$ e $\overline{St(w)}$ sono connessi per archi.

8. (Munkres Ch.1. Sec.2) Sia $\mathcal{K}$ un complesso simpliciale. Sia $\sigma \in \mathcal{K}$ un suo simplesso. Quando σ è aperto in $|\mathcal{K}|$?

9. (Fatto in classe) Sia $\mathcal{K}$ un complesso simpliciale. Dimostrare che $|\mathcal{K}|$ è T2.

10. (Munkres Ch.1. Sec.2) Sia $\mathcal{K}$ un complesso simpliciale. Dimostrare che $|\mathcal{K}|$ è normale (cioè è T2 e gli aperti separano i chiusi disgiunti).

11. Dimostrare che una applicazione $f\colon |\mathcal{K}| \to X$ in uno spazio topologico X è continua se e solo se $f_{|\sigma}$ è continua per ogni $\sigma \in \mathcal{K}$.

12. Verificare che la composizione di mappe simpliciali è una mappa simpliciale.

13. Calcolare l'omologia simpliciale di un complesso composto da una solo veritice (spazio topologico associato un singoletto). Calcolare l'omologia simpliciale di un complesso composto da un numero finito di vertici e nessun altro simplesso in dimensione superiore (spazio topologico associato un'unione finita di punti).

14. Sia $\sigma = [v_0, \ldots, v_n]$ un n-simplesso e sia $\mathcal{B} = \mathcal{K}_\sigma \setminus \{\sigma\}$ il complesso che ha il bordo come politopo. Considerare la mappa simpliciale f definita in questo modo: $v_i \mapsto v_{i+1}$ modulo $n+1$. Calcolare l'omomorfismo indotto in omologia da f.

15. Sia $\mathcal{K}$ il complesso simpliciale composto di 4 vertici $v_0, \ldots, v_3$, 5 1-simplessi $[v_0, v_1]$, $[v_0, v_2]$, $[v_1, v_2]$, $[v_1, v_3]$, $[v_2, v_3]$.

    (a) Calcolare i gruppi di omologia simpliciale di $\mathcal{K}$.

    (b) Sia ora $\mathcal{L} := \mathcal{K} \cup \{[v_0, v_1, v_2]\}$. Controllare che $\mathcal{L}$ sia un complesso e calcolarne l'omologia simpliciale.

16. Si considerino i complessi $\mathcal{R}$ e $\mathcal{K}$ in figura (1) (con le identificazioni dei bordi indicate- si noti che gli spazi topologici sottostanti sono $\mathbb{RP}^2$ e la ottiglia di Klein rispettivamente) Calcolare esplicitamente i gruppi di omologia.

17. Trovare una triangolazione opportuna delle superfici compatte e connesse e calcolarne i gruppi di omologia.

18. Dato il complesso $\mathcal{K}$ rappresentato in figura (2), sia B il suo bordo. Dimostrare che

    (a) ogni 1-ciclo di $\mathcal{K}$ è omologo ad un 1-ciclo supportato su B;

    (b) se d è una 2-catena il cui bordo è supportato su B, fissando i 2-simplessi $\sigma_1, \ldots, \sigma_{18}$ di $\mathcal{K}$ con orientazione antioraria,
    $$d = \alpha \sum_{i=1}^{18} \sigma_i$$
    per qualche $\alpha \in \mathbb{Z}$.

19. (Esercizio 2 munkres Chap.1 sec.11). Si considerino le figure piane con lati identificati come indicati in figura (3).

    (a) Costruire dei complessi che abbiano quegli spazi topologici come spazi associati.

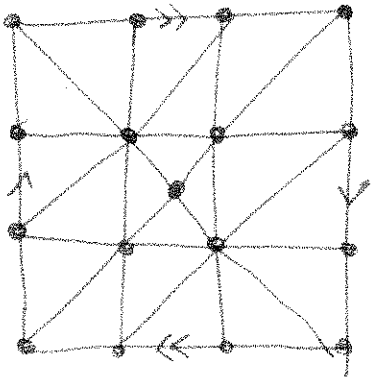
    (b) Calcolarne i gruppi di omologia.

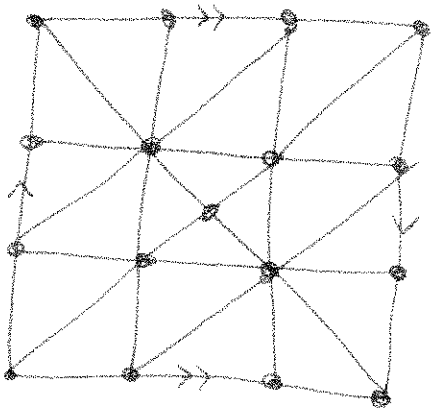
Istituzioni di Geometria Superiore A

a.a. 2017/2018 Lidia Stoppino

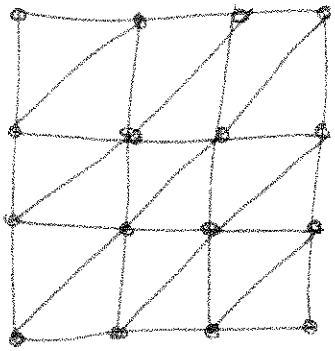
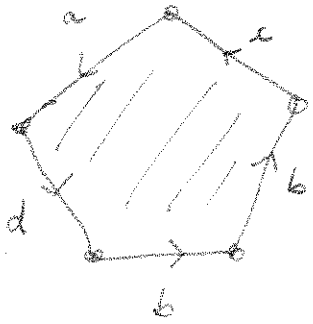
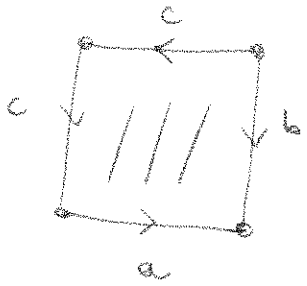
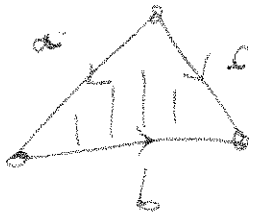
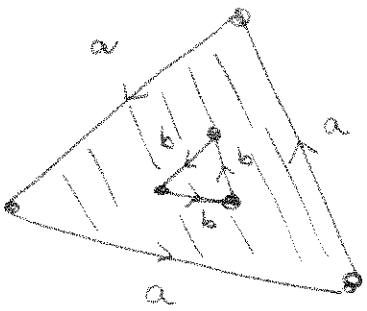
Foglio 3 (Esercizi sull'omologia)

(1)





(2)



(3)