

Istituzioni di Geometria Superiore - Diario delle lezioni

L. Stoppino, Università dell'Insubria, a.a. 2017/2018

Lunedì 26 febbraio (14-17: 3 ore):

Introduzione al corso.

Piccola introduzione alla teoria delle categorie. Definizione di categoria piccola. Esempi. Monoidi come categorie con un oggetto. Categoria opposta. Funtori tra categorie. Monoidi.

Il funtore π_0 . Funtorialità del gruppo fondamentale: il funtore “gruppo fondamentale” dalla categoria degli spazi topologici puntati alla categoria dei gruppi.

Referenza: Manetti 10.1, 10.4, 11.3.

Giovedì 1 marzo (11-13: 2 ore):

Gruppidi. Il funtore “gruppo fondamentale” dalla categoria degli spazi topologici alla categoria dei gruppidi. [Una referenza buona per questa parte è Ronald Brown (Topology and Groupoids), cap.6]

Prodotti e coprodotti nelle categorie. Definizione ed esempi noti.

Introduzione a Van Kampen: discussione sul gruppo fondamentale della figura ad otto.

Lunedì 5 marzo (14-17: 3 ore):

Un lungo intermezzo algebrico: presentazione di gruppi per generatori e relazioni.

Somma diretta di gruppi abeliani e gruppi abeliani liberi. Proprietà universale. Somma diretta come coprodotto nella categoria dei gruppi abeliani.

Prodotti liberi interni ed esterni: definizione e proprietà universale.

Referenza: Munkres Topology cap. 11.67-68

Giovedì 8 marzo (11-13: 2 ore)

Gruppi liberi, definizione, esempi e prime proprietà.

Gruppi liberi su un insieme qualsiasi.

Rango di un gruppo libero.

Teo: (solo enunciato) sottogruppi di gruppi liberi sono liberi.

Teo: (solo enunciato) Un sottogruppo di indice finito j di un gruppo libero di rango r ha rango $1 + j(r - 1)$.

Teo: (solo enunciato) Il gruppo derivato del gruppo libero su due elementi ha rango infinito.

Cor: Il gruppo libero su due elementi ha sottogruppi di rango arbitrario.

Referenza: Munkres Topology cap. 11.67-68-69.

Lunedì 12 marzo (14-17: 3 ore):

Gruppi per generatori e relazioni.

Esempi e proprietà.

Esercizi sui gruppi per generatori e relazioni.

Enunciato completo del Teorema di Seifert-Van Kampen.

Giovedì 15 marzo (11-13: 2 ore):

Dimostrazione di Van-Kampen con la proprietà universale del prodotto libero di gruppi.

Lunedì 19 marzo (10-11 e 14-17: 4 ore):

Fine della dimostrazione di Seifert- Van Kampen.

Il punto di vista delle categorie: prodotto fibrato e pushouts; enunciato per il gruppoide fondamentale.

Esercizi su Van Kampen: il gruppo fondamentale del bouquet di n circonferenze. Bouquet di infinite circonferenze. Calcolo del gruppo fondamentale. Il gruppo fondamentale dell'“orecchino infinito” non è generato dalle immagini dei gruppi fondamentali delle circonferenze.

Giovedì 22 marzo (11-13: 2 ore):

Definizione di varietà topologica. Esempi. Il quoziente di una varietà compatta e connessa di dimensione n per un'azione libera di un gruppo finito è una varietà compatta e connessa di dimensione n .

Lunedì 26 marzo (10-11 e 14-17: 4 ore):

Somme connesse di superfici. Gruppo fondamentale delle superfici. Enunciato della classificazione delle superfici compatte e connesse.

Esercizi su Seifert-van Kampen.

Giovedì 5 aprile (11-13: 2 ore):

Richiamo della dimostrazione che $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$: il ruolo della mappa esponenziale.

Rivestimenti: definizioni e prime proprietà. Esempi importanti (la mappa esponenziale, rivestimenti di S^1 , azioni propriamente discontinue, rivestimenti della figura ad otto).

Lunedì 9 aprile (10-11 e 14-17: 4 ore):

Teorema di sollevamento dell'omotopia (cor: teorema di sollevamento dei cammini e delle equivalenze dei cammini).

Azione di monodromia del gruppo fondamentale $\pi_1(X, x_0)$ sulla fibra $p^{-1}(x_0)$. Corrispondenza di lifting.

Teo: Se $\tilde{X}$ è connesso per archi allora l'azione di monodromia è transitiva.

Teo: Se $\tilde{X}$ è semplicemente connesso per archi allora la corrispondenza di lifting è biiettiva.

Oss: il sottogruppo $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})) \subseteq \pi_1(X, x_0)$ contiene le classi $[\alpha]$ tali che α si solleva a un laccio in $\tilde{X}$ con punto base $\tilde{x}$.

Teo: p_* è iniettivo e la corrispondenza lifting induce una mappa iniettiva tra $\pi_1(X, x_0)/p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$ e $p^{-1}(x_0)$.

Lunedì 16 aprile (10-11 e 14-17: 4 ore):

Richiami: spazi localmente connessi per archi e loro proprietà.

Lemma di sollevamento delle mappe.

Confronto con il sollevamento dell'omotopia.

Controesempio con il seno del topologo: la condizione localmente cpa è necessaria.

Verifica che la restrizione di un rivestimento ad una componente cpa è un rivestimento (se gli spazi sono localmente connessi per archi)

Equivalenza di rivestimenti. Esempi.

Sottogruppo associato ad un rivestimento e comportamento rispetto ad equivalenze. Inizio della corrispondenza di Galois.

Giovedì 19 aprile (11-13: 2 ore):

Gruppo di trasformazioni del rivestimento $G(p)$. Esempi. Rivestimenti normali o regolari.

Teo: $G(p)$ agisce in modo propriamente discontinuo sullo spazio totale $\tilde{X}$.

Teo: chiamato $H_0 = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \subset \pi_1(X, x_0)$, c'è un isomorfismo tra $N(H_0)/H_0$ e il gruppo di trasformazioni del rivestimento.

Teo: i rivestimenti regolari corrispondono alle azioni propriamente discontinue di gruppi.

Lunedì 23 aprile (10-11 e 14-17: 4 ore):

Definizione di rivestimento universale.

Proprietà universale del rivestimento universale.

Esempio: l'orecchino infinito non possiede un rivestimento universale.

Giovedì 26 aprile (11-13: 2 ore):

def. di spazio localmente semplicemente connesso.

Costruzione del rivestimento universale per spazi localmente semplicemente connessi.

Giovedì 3 maggio (11-13: 2 ore):

Dimostrazione topologica che le superfici orientabili hanno $\mathbb{R}^2$ come rivestimento universale (ref. J. Stillwell, Classical topology and combinatorial group theory).

Teoria dell'omologia singolare. Simpletti: definizioni e prime proprietà.

Lunedì 7 maggio (10-11 e 14-17: 4 ore):

Proprietà dei simpletti. Complessi simpliciali in $\mathbb{R}^N$. Definizione e prime proprietà. I simpletti hanno un complesso naturalmente associato.

Sottocompletti. p -scheletro di un complesso.

Topologia della realizzazione. Confronto con la topologia euclidea.

Complessi finiti e loro proprietà.

Coordinate baricentriche. Stella di un vertice.

Giovedì 10 maggio (11-13: 2 ore):

Un complesso è compatto se e solo se è finito. Ogni compatto in un complesso è il poliedro di un sottocomplesso finito.

Complessi localmente finiti e loro proprietà.

Mappe simpliciali.

Complessi in E^J .

Complessi astratti.

Lunedì 14 maggio (9-11: 2 ore):

Simplessi orientati. Esempi e prime osservazioni.

Definizione del gruppo delle p -catene. Prime proprietà.

Giovedì 17 maggio (11-13: 2 ore):

Definizione dei gruppi di omologia.

Calcolo dei gruppi di omologia in casi elementari.

Lunedì 21 maggio (10-11 e 14-17: 4 ore):

Omologia 0-dimensionale e componenti connesse per archi. Omologia ridotta

Supporto di una p -catena.

Omologia di superfici compatte. Discussione.

Omologia e gruppo fondamentale: enunciato.

Giovedì 24 maggio (11-13: 2 ore):

Omologia del cono: omologia dei semplici e dei loro bordi.

Omomorfismo indotto da mappe simpliciali. Funtorialità.

Invarianza topologica dell'omologia (solo enunciato).

Lunedì 28 maggio (10-13: 3 ore):

Applicazioni: invarianza della dimensione.

Teorema del punto fisso di Brouwer.

Applicazioni: Mappe tra sfere. Grado della mappa antipodale.

Giovedì 31 maggio (11-13: 2 ore):

Esercizi.

Lunedì 11 giugno (10-13: 3 ore):

Esercizi.