Geometria I

CdL in Matematica, Università dell'Insubria

Prova scritta del 13 gennaio 2015

Giustificare sempre le risposte.

1. Vero o falso? [se vero spiegate perchè, se falso esibite un controesempio]
   (a) In qualunque spazio topologico i sottospazi compatti sono chiusi.
   (b) Un chiuso in uno spazio compatto è compatto.
   (c) Un sottospazio di cardinalità infinita in uno spazio compatto non può essere chiuso.
   (d) Un sottospazio di cardinalità infinita in uno spazio compatto non può essere discreto.

2. Consideriamo un insieme di quattro elementi $X = \{a, b, c, d\}$.
   (a) Quali sono le topologie metrizzabili su X?
   (b) Quali tra le seguenti famiglie

$$\mathcal{B}_1 := \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\},$$

$$\mathcal{B}_2 := \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{d\}\}$$

$$\mathcal{B}_3 := \{\{d\}, \{d, b\}, \{a, c\}\}$$

   sono una base per una topologia su X? Per quelle che lo sono, scrivere gli aperti della topologia che inducono.
   (c) Sia $Y = \{x, y\}$ un insieme con due elementi. Fare un esempio, se esiste, di una topologia sull'insieme $Y \times Y$ che non sia una topologia prodotto indotta da una topologia su Y.

3. Classificare a meno di omeomorfismi i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ (con la topologia euclidea).
   (a) una retta;
   (b) l'unione di due rette parallele;
   (c) l'unione di due rette incidenti;
   (d) $\{(x, y) \mid x^2 + y = 1\}$;
   (e) $\{(x, y) \mid xy = 1\}$.

4. Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^3$ (con la topologia euclidea) così definiti:

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, z \in [-1, 1]\},$$

$$Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, z \in [-1, 1)\},$$

   Si osservi che $Z \subset Y \subset X$.
   (a) Si calcolino (motivando la risposta) i gruppi fondamentali di X e di Y.
   (b) È vero che Y è retratto di deformazione di X?