Geometria I

CdL in Matematica, Università dell'Insubria

Prova scritta del 28 gennaio 2015

Risoluzione esercizio 3

3 Sia $X = \{2, 3, \dots\}$ l'insieme dei numeri interi maggiori o uguali a 2. Per ogni $n \in X$ definiamo gli insiemi

$$U_n := \{m \in X \mid m \text{ divide } n\}.$$

(a) Dimostrare che gli U_n , al variare di $n \in X$ formano una base per una topologia $\mathcal{T}$ su X .

Soluzione: per ogni $n, m \in X$ abbiamo che $U_n \cap U_m = U_M$, dove M è il massimo comune divisore tra n e m . Basta dunque applicare il lemma della base.

(b) Lo spazio topologico $(X, \mathcal{T})$ è T_0 ? *Sol:* sì: per ogni $n, m \in X$ distinti supponiamo che $n > m$. Allora per forza $n \notin U_m$. È T_1 ? *Sol:* no. Ad esempio si può vedere che 3 appartiene ad ogni aperto che contiene 6 (vedete osservazione punto sotto). È T_2 ? *Sol:* no, non essendo T_1 a maggior ragione non è T_2 .

(c) Per ogni $n \in X$, descrivere la chiusura di $\{n\}$ in $(X, \mathcal{T})$. *Soluzione:* la parte interna di $X \setminus \{n\}$ è:

$$(X \setminus \{n\})^\circ = \{k \in X \mid n \text{ non divide } k\}.$$

Osserviamo che se $A \in \mathcal{T}$ è un aperto che contiene un elemento k , allora $U_k \subseteq A$. Infatti sia U_m aperto della base tale che $k \in U_m \subseteq A$: allora per definizione di U_m si ha che k divide m , e allora $U_k \subseteq U_m$. Questo permette di dimostrare l'identità sopra descritta per doppia inclusione.

Dunque

$$\overline{\{n\}} = \{k \in X \mid n \text{ divide } k\} = \{\text{Multipli di } n\}.$$

Osserviamo che da questo si deduce anche che $(X, \mathcal{T})$ non è T_1 (e dunque non è T_2)

(d) Consideriamo la relazione di equivalenza su X

$$n \sim m \iff 2 \mid (n - m).$$

Descrivere lo spazio quoziente $X/\sim$ (ovviamente considerando la topologia $\mathcal{T}$ su X).

Soluzione: Questo spazio ha due elementi, la classe di 2 e la classe di 3, che chiamiamo a e b . La classe di 2 è l'insieme dei numeri pari, che non è aperto in $(X, \mathcal{T})$ (si può usare il punto sopra, ma anche: ad esempio osservare che 6 è pari e $3 \in U_6$, dunque 3 appartiene ad ogni aperto che contiene 6: dunque a non è aperto nel quoziente; invece la classe di 3 (che sono i dispari $\mathcal{D}$) è aperta in X : si può fare col punto precedente o osservando direttamente che è uguale a

$$\mathcal{D} = \bigcup_{n \in \mathcal{D}} U_n.$$