Geometria I

CdL in Matematica, Università dell'Insubria

Prova scritta del 5 settembre 2016

Giustificare sempre le risposte.

Ricordate che ci sono spesso molti modi diversi di risolvere un esercizio

1. Vero o falso? [se vero spiegate perchè, se falso esibite un controesempio]

   (a) Una topologia in cui ogni aperto è chiuso è necessariamente la topologia discreta.
   Falso: un controesempio è fornito da un insieme con più di due elementi con la topologia concreta. Infatti in questo caso è vero che ogni aperto è chiuso ma la topologia non è discreta.

   (b) Una topologia che ammette una base i cui elementi sono chiusi (oltre che ovviamente aperti) è necessariamente la topologia discreta.
   Falso: Lo stesso esempio del punto precedente con la topologia concreta andava bene. Un altro esempio più fancy è il seguente: nella retta di Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ *gli elementi della forma* $(a, b]$ *(con* $a < b$*) formano una base, ma sono anche chiusi. Infatti:*

   $$\mathbb{R} \setminus \{[a, b)\} = (-\infty, a) \cup [b, +\infty) = (\cup_{n\in\mathbb{N}}[-n, a)) \cup (\cup_{n\in\mathbb{N}}[b, n)),$$

   dove la seconda uguaglianza mostra che il complementare di $[a, b)$ *si può scrivere come unione di elementi appartenti alla base. D'altra parte la topologia della retta di Sorgenfrey non è quella discreta: ad esempio si può osservare che i punti non sono aperti: se lo fossero dovrebberro contenere un elelemento della base, cosa che non avviene.*

   (c) In qualunque topologia i punti sono chiusi.
   Falso: la proprietà che i punti siano chiusi è una proprietà di separazione che di solito si indica con il simbolo T1. Non tutte le topologie sono T1: un esempio semplice è la topologia concreta su un insieme di almeno due elementi. I soli chiusi sono lo spazio stesso e il vuoto.

   (d) In qualunque topologia metrizzabile i punti sono chiusi.
   Vero: Sia X *spazio metrizzabile, sia* d *una metrica che induce la topologia di* X*. Sia* $x \in X$ *un punto qualunque. Vediamo che il complementare è aperto: per ogni* $y \neq x$ *la bolla di centro* y *e raggio* $d(x, y)$ *non contiene* x*, dunque* $X \setminus \{x\}$ *è aperto.*

2. Sia $f\colon X \longrightarrow Y$ un'applicazione aperta tra spazi topologici, e sia $S \subseteq Y$ un sottoinsieme denso.

   (a) Scrivere cosa significa applicazione aperta e sottoinsieme denso.
   Un'applicazione $f\colon X \longrightarrow Y$ *tra spazi topologici si dice aperta se manda aperti in aperti, cioè se per ogni* $U \subseteq X$ *aperto (in* X*)* $f(U) \subseteq Y$ *è aperto (in* Y*). Un sottoinsieme* S *di uno spazio topologico* X *è denso se la sua chiusura è tutto* X*; equivalentemente se ogni aperto non vuoto di* X *ha un'intersezione non banale con* S*.*

   (b) Fare un esempio di un sottoinsieme proprio denso di uno spazio topologico. *Per esempio i numeri razionali* $\mathbb{Q}$ *sono densi nei reali* $\mathbb{R}$ *con la topologia euclidea. Un altro esempio: il disco aperto* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ *è denso nella sua chiusura in* $\mathbb{R}^2$*, che è il disco chiuso* $\overline{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$*.*

(c) Dimostrare che $f^{-1}(S)$ è denso in X.
Sia A un aperto non vuoto di X. Vogliamo dimostrare che $A \cap f^{-1}(S)$ non è vuoto. Poiché f è aperta per ipotesi, $f(A)$ è aperto (ovviamente non vuoto non essendo vuoto A). Dunque per la densità di S in Y, $f(A) \cap S$ non è vuoto. Dunque esiste $a \in A$ tale che $f(a) \in S$. Quindi questo elemento a appartiene a $f^{-1}(S)$, come volevamo.

(d) Esibire un controesempio togliendo l'ipotesi che l'applicazione sia aperta.
Possiamo prendere ad esempio un insieme con due elementi X. Sia $\mathcal{D}$ la topologia discreta su X e $\mathcal{C}$ quella concreta. Consideriamo l'identità

$$id_X \colon (X, \mathcal{D}) \longrightarrow (X, \mathcal{C}).$$

Ovviamente non è aperta. Sia $p \in X$: p è denso in $(X, \mathcal{C})$ ma $(id_X)^{-1}(p) = p$ non è denso in $(X, \mathcal{D})$.

3. Classificare a meno di omeomorfismo i seguenti spazi topologici.

(a) $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea;

(b) $\mathbb{R}$ con la topologia di Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$(ricordiamo che una base per la topologia sono gli intervalli della forma $[a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$);

(c) $\mathbb{R}^2$ con la topologia eucludea;

(d) Lo spazio quoziente $X = \mathbb{R}/\sim$ dove su $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea considero la relazione di equivalenza $x \sim y$ se se solo se $x = y$ oppure $x, y \in [1, 2]$;

(e) Lo spazio quoziente $Y = \mathbb{R}/\sim$ dove su $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea considero la relazione di equivalenza $x \sim y$ se se solo se $x = y$ oppure $x, y \in (1, 2]$;

Le classi di omeomorfismo sono: $\{(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e), X\}, \{(\mathbb{R}, \mathcal{S})\}, \{(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_e)\}, \{Y\}$. Per verificare questo possiamo fare le seguenti osservazioni:

- *La retta di Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ non è metrizzabile (poiché è 2-numerabile e separabile, cioè possiede un sottoinsieme numerabile denso, ma non è 1-numerabile); inoltre questo spazio è T2.*
- *$\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ con la topologia euclidea è T2 e metrizzabile.*
- *$\mathbb{R}$ non è omeomorfo a $\mathbb{R}^2$: se esistesse un omeomorfismo $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, allora anche la sua restrizione a $\mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^2 \backslash \{\varphi(0)\}$ dovrebbe essere un omeomorfismo, ma $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ è sconnesso mentre $\mathbb{R}^2$ meno un punto è connesso (anzi connesso per archi- dimostrare).*
- *Lo spazio Y non è T2, infatti il punto che corrisponde alla classe di equivalenza $(1, 2]$ non è chiuso, quindi Y non è neanche T1 (cioè i punti non sono chiusi).*
- *per concludere rimane da dimostrare che X è omeomorfo a $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$. Sia p il punto che corrisponde alla classe di equivalenza $[1, 2]$. Gli altri punti di x hanno un unico elemento nelle loro classi di equivalenza, quindi li posso identificare con $(-\infty, 1) \cap (2, +\infty)$. Definisco la applicazione $\theta \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ in questo modo:*

$$\theta(x) := \begin{cases} x \text{ se } x \in (-\infty, 1) \\ 1 \text{ se } x = p \\ x - 1 \text{ se } x \in (2, +\infty) \end{cases}$$

Questa applicazione è chiaramente ben definita e biiettiva. E' continua per la proprietà universale della topologia quoziente, ed è facile vedere che è chiusa (dimostratelo).

4. Sia $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, con la topologia indotta da quella euclidea.

   (a) È connesso per archi? *Sì: dati due punti tali che il segmanto che li congiunge non contiene l'origine, esso definisce un arco tra di essi. Se invece il segmento contiene l'origine allora si può unirli ad esempio con un arco di circonferenza.*

   (b) Dimostrare che è omotopicamente equivalente a S^2. *In effetti* $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ *è un retratto forte di deformazione di* X *(definire retratto di deformazione). La retrazione è la normalizzazione* $r\colon X \to S^2$ *definita così:* $r((x,y,z) = \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. *Un'omotopia tra* $i \circ r$ *e l'identità in* X *è la seguente:*

$$F\colon X \times I \to X$$

$$F((x,y,z),t) = (tx,ty,tz) + (1-t)\frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

   (definire una omotopia e verificare che questa lo è)

   (c) Calcolarne il gruppo fondamentale. *Poiché sono omotopicamente equivalenti,* X *e* S^2 *hanno lo stesso gruppo fondamentale. Il gruppo fondamentale di* S^2 *si calcola usando la versione semplificata del teorema di Van Kampen, come fatto a lezione (da esplicitare).*