Geometria I

Università dell'Insubria

Esercizi 3

a.a. 2015/2016

1. Siano X e Y due spazi topologici, e $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ due sottoinsiemi. Dimostrare che
$$\overline{A} \times \overline{B} = \overline{A \times B},$$
dove a sinistra ci sono le chiusure rispettivamente in X e in Y, a destra la chiusura in $X \times Y$.

2. Sia (X, d) uno spazio metrico. Dimostrare che la metrica
$$d\colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$
è continua, prendendo a sisistra la topologia prodotto e a destra la topologia euclidea.

3. Sia $f\colon X \longrightarrow Y$ funzione continua con Y spazio di Hausdorff. Dimostare che il grafico
$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$$
è chiuso.

4. Siano $f, g\colon X \longrightarrow Y$ applicazione continue con Y spazio di Hausdorff. Sia $A \subseteq X$ un sottoinsieme denso di X tale che $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in A$. Dimostrare che allora $f \equiv g$ su tutto X.

5. Si consideri $\mathbb{R}^2$ con la topologia prodotto indotta dalla topologia $\mathcal{T}_S$ della retta di Sorgenfry su entrambi i fattori. Si dimostri che l'insieme
$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$$
è discreto. Qual'è la topologia indotta sull'insieme $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$?

6. Sia T il toro ottenuto come identificazione di figura piana $Q/\sim$ dove $Q = [-1, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ e $(x, y) \sim (x', y')$ se e solo se $(x, y) = (x', y')$ oppure $\{x, x'\} = \{\pm 1\}$ e $y = y'$, oppure $\{y, y'\} = \{\pm 1\}$ e $x = x'$. Dimostrare che $T \sim S^1 \times S^1$.

7. Sia $F \subseteq \{x \geq 0\} \subset \mathbb{R}^3$ è una figura piana che non interseca l'asse z; dimostrare che il solido di rotazione che ottengo ruotandolo intorno all'asse z è omeomorfo a $F \times S^1$.

8. Sia $\mathcal{B}$ una base di uno spazio topologico a base numerabile. Dimostrare che esiste una sottofamiglia numerabile $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ che è una base della topologia.

9. Sia$f\colon X \to Y$ continua e surgettiva. Provare che se X è separabile allora anche Y è separabile. Se in aggiunta f è aperta e X ha una base numerabile, allora anche Y ha una base numerabile.

10. Provare che il prodotto di due spazi separabili è separabile. Trovare un esempio di spazio separabile e di un suo sottospazio non separabile. (Sugg.: $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S) \times (\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$)

11. Quali sono i sottospazi connessi di uno spazio con topologia discreta?

12. Il prodotto di spazi connessi per archi è connesso per archi.

13. Dimostrare che $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ con la topologia indotta da qualla euclidea non è connesso.

14. Dimostrare che X spazio topologico è connesso se e solo se ogni funzione continua da X in uno spazio discreto è costante.

15. Se $A, B \subseteq X$ sono due sottospazi connessi di uno spazio topologico X, se $A \cap B \neq \emptyset$, allora $A \cup B$ è connesso.

16. Sia $Y \subseteq X$ un sottospazio connesso di uno spazio topologico X. Sia W un sottospazio di X tale che
$$y \subseteq W \subseteq \overline{Y}.$$
Dimostrare che W è connesso.

17. Dimostrare che uno spazio con la topologia concreta è sempre connesso.

18. Dimostrare che la retta di Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \mathcal{J}_d)$ non è connessa. Quali sono le sue componenti connesse?

19. Un sottoinsieme S di $\mathbb{R}^n$ si dice *stellato* se esiste un punto $\underline{x}_0 \in S$ tale che per ogni $\underline{y} \in S$ il segmento che unisce $\underline{y}$ e $\underline{x}_0$ è tutto contenuto in S. Dimostrare che i sottoinsiemi stellati sono connessi per archi.

20. Dimostrare che $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ non è omeomorfo a $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

21. Quali sono le componenti connesse di $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ con la topologia euclidea?

22. Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^2$ con la topologia indotta da quella euclidea.
$$Y := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\},$$
$$Z := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0,\ x^2 + y^2 = 1\}.$$
Dimostrare che non sono omeomorfi.

23. Classificare (cioè suddividere in classi di omeomorfismo) le seguenti lettere greche, come sottospazi di $\mathbb{R}^2$:
$$\Delta \quad \Theta \quad \Lambda \quad \Xi \quad \Pi \quad \Sigma \quad \Upsilon \quad \Phi \quad \Psi \quad \Omega$$

24. Siano X e Y due spazi topologici. Supponiamo che Y sia connesso. Dimostrare che se $f \colon X \longrightarrow Y$ è un'identificazione le cui fibre sono tutte connesse, allora X è connesso.

25. Dimostrare che:

    (a) Per $n \geq 2$ lo spazio $\mathbb{R}^n$ privato di un qualsiasi punto con la topologia euclidea è connesso per archi.

(b) Usare il punto precedente per concludere che $\mathbb{R}$ non è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$ per $n \geq 2$.

26. Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 < 1\}$$

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 < 1\}$$

Stabilire quali dei seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^2$ sono connessi con la topologia euclidea.

$$B \cup D \qquad \overline{B} \cup D \qquad \overline{B} \cup \overline{D}.$$

27. Sia S^n la sfera n-dimensionale

$$S^n := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid ||\underline{x}|| = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

Con la topologia indotta da quella euclidea. Dimostrare che S^n è connesso per archi per $n \geq 1$.

28. Consideriamo il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^2$ (con topologia euclidea).

$$S := \{(x, \sin(1/x)), x \in (0, 1]\}$$

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false (e dimostrarle nel primo caso, confutarle nel secondo).

(a) S è connesso;

(b) S è connesso per archi.

(c) S è omeomorfo a $[0, 1]$;

(d) S è omeomorfo ad $\mathbb{R}$;

(e) $S \cup \{(0, 1)\}$ è connesso;

(f) $S \cup \{(0, 1)\}$ è connesso per archi;

(g) $\overline{S}$ è omeomorfo a $[0, 1]$.