ESERCIZI 5

L. Stoppino, corso di Geometria I, Università dell'Insubria, a.a. 2015/16

1. Dimostrare che un sottoinsieme stellato di $\mathbb{R}^n$ è contraibile.
2. Dimostrare che il prodotto di spazi contraibili è contraibile.
3. Una corona circolare si retrae forte di deformazione su uno dei suoi bordi.
4. Verificare che $\mathbb{R}^2$ meno due punti si retrae forte di deformazione sulla figura a otto.
5. Dimostrare che un triangolo pieno in $\mathbb{R}^2$ si retrae su due suoi lati.
6. Dimostrare che in uno spazio $T2$ ogni retratto è chiuso.
7. Se $Y \subseteq X$ è un retratto di uno spazio topologico X, allora per ogni $y \in Y$ l'applicazione indotta sui gruppi fondamentali
$$r_*\colon \pi_1(Y, y) \longrightarrow \pi_1(X, y)$$
è iniettiva.
8. Dimostrare che la circonferenza S^1 non è un retratto del disco D.
9. Sapendo che $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, calcolare il gruppo fondamentale del toro.
10. Calcolare il gruppo fondamentale della striscia di Möbius (sugg. vedere che ha S^1 come retratto forte di deformazione).
11. Il gruppo fondamentale della figura a otto è banale?
12. Un esempio di un retratto *non forte* di deformazione: si prenda l'insieme X dei punti delle rette passanti per l'origine con pendenza razionale in $\mathbb{R}^2$, dotato della topologia indotta da quella euclidea:
$$X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = 0, a, b \in \mathbb{Q}\}$$
Dimostrare che

(a) X è connesso per archi ma non è localmente connesso per archi. (*localmente connesso per archi: ogni punto possiede un sistema fondamentale di intorni connesso per archi*)
(b) Il punto $(0,0)$ è un retratto forte di deformazione di X (e in particolare X è contraibile).
(c) Ogni altro punto di X è un suo retratto di deformazione ma non forte.

13. Dimostrare che se $\pi_1(S^1)$ fosse banale, allora per ogni spazio topologico X, per ogni $x_0 \in X$ avremmo che $\pi_1(X, x_0)$ sarebbe banale.

14. Siano A, B due aperti di uno spazio topologico. Dimostrare che se $A \cup B$ e $A \cap B$ sono connessi per archi, allora A e B sono connessi per archi.

15. Dimostrare che $\mathbb{R}^3$ meno un numero finito di punti è semplicemente connesso.

16. Calcolare il gruppo fondamentale dei sottospazio di R^3 così definiti:
   (a) Unione della sfera S^2 e di $\{x = 0\}$: $X = S^2 \cup \{x = 0\}$.
   (b) Unione della sfera S^2 e di $\{x = 0\}$ meno l'origine:
   $$Y = X \setminus \{(0,0,0)\}.$$
   (c) Unione della sfera S^2 e di $\{x = 0\}$ meno l'origine e $(0, 1/2, 0)$:
   $$Z = X \setminus \{(0,0,0), (0,1/2,0)\}.$$
   (d) Unione della sfera S^2 e di $\{x = 0\}$ meno l'origine e il polo nord $(1,0,0)$:
   $$Z = X \setminus \{(0,0,0), (1,0,0)\}.$$
   (e) Unione della sfera S^2 e di due piani coordinati:
   $$Y = S^2 \cup \{x = 0\} \cup \{y = 0\}.$$

17. Calcolare il gruppo fondamentale di $\mathbb{R}^n \setminus W$, dove W è un sottospazio vettoriale di dimensione k. [sugg: sia $V \subseteq \mathbb{R}^n$ l'ortogonale a W (dunque $\dim V = n - k$ per la formula di Grassmann. Dimostrare che $V \setminus \{0\}$ è un retratto forte di deformazione di $\mathbb{R}^n \setminus W$, poi calcolare il π_1 di $V \setminus \{0\}$].