15 novembre

Esercitazioni Dal foglio 4

8) **$(\mathbb{R}, \mathcal{C})$ è compatto?** $\mathcal{C} = \{\mathbb{R}, \emptyset\}$

un ricoprimento aperto di $\mathbb{R}$ con $\mathcal{C}$

contiene sempre $\mathbb{R}$ come aperto

$\{\mathbb{R}\}$ è sempre un sottoricoprimento finito.

quindi $(\mathbb{R}, \mathcal{C})$ è compatto.

oss. Allo stesso modo qualunque spazio con la topologia concreta è compatto

$(\mathbb{R}, \mathcal{D})$ è compatto?

$\mathcal{D} = \mathcal{P}(X)$ voglio vedere che non è compatto.

$A = \{\{x\}, x \in \mathbb{R}\}$ è un ricoprimento aperto di $\mathbb{R}$ con $\mathcal{D}$

$\mathcal{A}$ non ammette sottoricoprimenti propri:

Se $\mathcal{A}' \subsetneq \mathcal{A}$ $\quad \exists\, \bar{x} \in \mathbb{R}$ t.c. $\{\bar{x}\} \notin \mathcal{A}'$

$\bigcup_{A \in \mathcal{A}'} A \not\ni \bar{x}$ quindi $\mathcal{A}'$ non è un sottoricoprimento di $\mathcal{A}$!

e $\mathcal{A}$ è infinito : ok è controesempio per la compattezza

$(\mathbb{R}, \mathcal{D})$ non è compatto.

OSS. 1
Questo stesso controesempio si può fare per qualunque spazio con topologia discreta e cardinalità infinita.

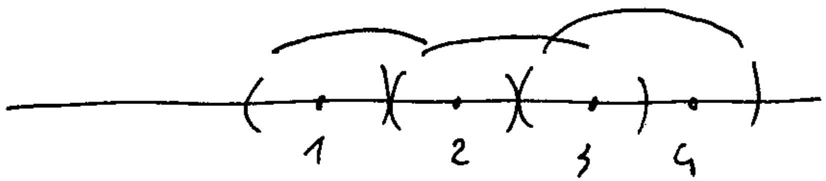
OSS. 2 se $|X| < +\infty$ comunque $\{\{x\} \;\; x \in X\}$ è ricoprimento aperto di $(X, \mathcal{D})$ che non possiede sottoricoprimenti propri. Ma esso stesso è finito! Infatti qualunque spazio finito è compatto con qualunque topologia.

→ <u>$(\mathbb{R}, \tau_e)$ non è compatto:</u> $\{(-N, N)\ ,\ N \in \mathbb{N}^+\} = \mathcal{A}$

ricoprimento che non possiede sottoricoprimenti finiti.

anche questo va bene

$$\left\{ \left(n - \tfrac{1}{2}\ ,\ n + \tfrac{3}{2}\right),\ n \in \mathbb{N} \right\}$$



torniamo a $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$ Il ricoprimento preso prima <u>NON</u> funziona per $(\mathbb{R}, \tau_e)$ ma tutti i ricoprimenti aperti di $\mathbb{R}$ con τ_e sono ricoprimenti aperti anche con $\mathcal{D}$

NON compattezza di $(\mathbb{R}, \tau_e)$ $\Longrightarrow$ non compattezza di $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$

<u>OSS</u> (X, τ), $(X, \mathcal{S})$ $\tau, \mathcal{S}$ topologie su X

supponiamo che $\tau \leq \mathcal{S}$

se (X, τ) non è compatto $\Rightarrow$ $(X, \mathcal{S})$ non è compatto.

se A è un ric aperto per τ che non ammette sottoric. finiti

allora " " " " $\mathcal{S}$ " " " " "

equivalentemente:

se $(X, \mathcal{S})$ è compatto $\Rightarrow$ (X, τ) è compatto $\left[\dfrac{A \Rightarrow B}{\text{NON}B \Rightarrow \text{NON}A} \right]$

→ <u>$(\mathbb{R}, \tau_S)$ è compatto</u> ? τ_S topologia di Sorgenfrey

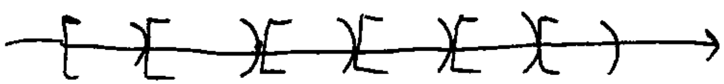
topologia che ha come base

$\{ [a, b) \ , a < b \}$

$$\mathcal{C} \subsetneqq \tau_e \subsetneqq \tau_s \subsetneqq \mathcal{D}$$

$(\mathbb{R}, \tau_e)$ non è compatto $\Rightarrow$ $(\mathbb{R}, \tau_s)$ non è compatto!

<u>OSS.</u> posso anche costruire ricoprimenti aperti per τ_s non aperti per τ_e che non possiedono sottoric. finiti:



$\{[n, n+1), n \in \mathbb{Z}\}$ è ric. aperto per τ_s (non per τ_e!)

e non ha sottoric. propri!

<u>A voi</u>: $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ studiarne la compattezza con le topologie indotte da $\mathcal{D}$, $\mathcal{C}$, τ_e, e τ_s

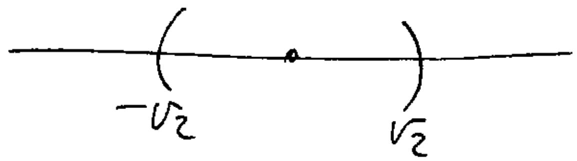
9) $Y = \{ y \in \mathbb{Q} \text{ tc. } |x| < \sqrt{2} \} \subseteq \mathbb{Q}$ con τ_e

Y è chiuso e limitato ma non è compatto in $(\mathbb{Q}, \tau_e)$

limitato ok

chiuso? $Y = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$

(è aperto)



$= [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$

$\exists$? C chiuso in $(\mathbb{R}, \tau_e)$ tale che $Y = C \cap \mathbb{Q}$?

sì $C = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ è tale chiuso!

non è compatto: prendiamo "quello che non funziona per $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ in $\mathbb{R}$"

$$\left\{\left(-\sqrt{2}+\frac{1}{n},\ \sqrt{2}-\frac{1}{n}\right)\cap\mathbb{Q},\quad n\in\mathbb{N}_{\geq 2}\right\}$$ è ricoprimento aperto di Y

se prendo una sottofamiglia finita di questi aperti

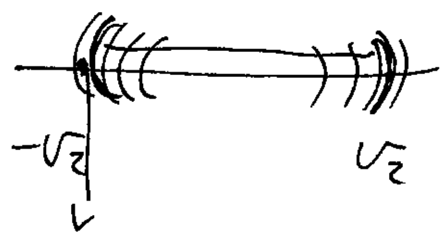
$$\left\{\left(-\sqrt{2}+\frac{1}{n_1},\ \sqrt{2}-\frac{1}{n_1}\right), \dots \left(-\sqrt{2}+\frac{1}{n_k},\ \sqrt{2}+\frac{1}{n_k}\right)\right\}$$

questo non è un ricoprimento di Y

$$\bigcup_{i=1}^{k}\left(-\sqrt{2}+\frac{1}{n_i},\ \sqrt{2}-\frac{1}{n_i}\right) = \left(-\sqrt{2}+\frac{1}{\max\{n_i\}},\ \sqrt{2}-\frac{1}{\max\{n_i\}}\right)$$

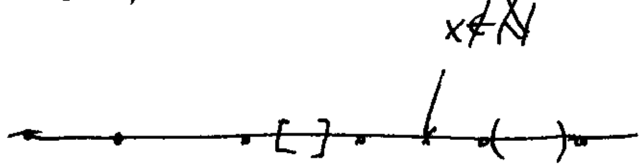
ma $\exists\ q\in\mathbb{Q}$ tale che

$$-\sqrt{2} < q < -\sqrt{2}+\frac{1}{\max\{n_i\}}$$



per la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$

12) $\tau = \{ Y \subseteq \mathbb{R} \mid Y \cap \mathbb{N} = \emptyset \} \cup \{ \mathbb{R} \} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$



a) Dimostriamo che τ è una topologia su $\mathbb{R}$

I) $\mathbb{R} \in \tau$ per def $\quad \emptyset \cap \mathbb{N} = \emptyset$ allora $\emptyset \in \tau$

II) $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ collezione di elementi di τ $\quad$ e $\mathbb{R} \cup S = \mathbb{R} \in \tau \ \forall S \subseteq \mathbb{R}$

possiamo supporre che $\forall \alpha \quad \mathcal{U}_\alpha \cap \mathbb{N} = \emptyset$ perché $\mathbb{R} \cap S = S \ \forall S \subseteq \mathbb{R}$

$$\Big(\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{U}_\alpha\Big) \cap \mathbb{N} = \bigcup_{\alpha \in A} (\mathcal{U}_\alpha \cap \mathbb{N}) = \emptyset \implies \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{U}_\alpha \in \tau$$

III) $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \tau$ di nuovo posso supporre che $\mathcal{U} \cap \mathbb{N} = \emptyset = \mathcal{V} \cap \mathbb{N}$

$(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \cap \mathbb{N} = \emptyset$ a maggior ragione $\quad \boxed{OK}$

b) τ è confrontabile con τ_e?

$\tau \not\subseteq \tau_e$ infatti per esempio $\{\sqrt{2}\}$ o $\{1/2\} \in \tau$ infatti

$\{\sqrt{2}\} \cap \mathbb{N} = \emptyset$

$\{1/2\} \cap \mathbb{N} = \emptyset$

ma non appartengono a τ_e

e $\tau_e \not\subseteq \tau$ infatti perché $(-1,1)\cap\mathbb{N} = \{0\} \neq \emptyset$ e $(-1,1)\neq\mathbb{R}$

quindi $(-1,1) \notin \tau$ ma $(-1,1) \in \tau_e$

No non sono topologie confrontabili.

(c) $(\mathbb{R},\tau)$ è compatto? aperti $Y \subseteq \mathbb{R}$ con $Y\cap\mathbb{N} = \emptyset$ oppure $\mathbb{R}$ stesso

prendo $\mathcal{A}$ ricoprimento aperto di $\mathbb{R}$ con τ

$\mathcal{A} \subseteq \tau$ $\qquad \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A = \mathbb{R} \ni 0$

in particolare $\exists\, \bar{A}\in\mathcal{A}$ tc $0\in\bar{A}$ $\Rightarrow \bar{A}\cap\mathbb{N}\ni 0 \overset{\text{per com'è fatta } \tau}{\Rightarrow} \bar{A}=\mathbb{R}$

Allora $\{\mathbb{R}\}$ è sottoricoprimento finito di $\mathcal{A}$ $\boxed{\text{ok}}$

(d) $(\mathbb{R},\tau)$ è connesso?

come sono i chiusi? $C\subseteq\mathbb{R}$ è chiuso sse $\mathbb{R}\setminus C$ è aperto

cioè o $\mathbb{R}\setminus C = \mathbb{R}$ $\qquad C=\emptyset$

o $(\mathbb{R}\setminus C)\cap\mathbb{N} = \emptyset$ $\qquad (\mathbb{R}\cap\mathbb{N})\setminus(C\cap\mathbb{N})$

cioè $\mathbb{N} \setminus (C \cap \mathbb{N}) = \emptyset$ cioè $C \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$ cioè $C \supseteq \mathbb{N}$

i chiusi per τ sono esattamente $\{ C \subseteq \mathbb{R} \text{ tc } C \supseteq \mathbb{N} \} \cup \{\emptyset\}$

prendo $A \subseteq \mathbb{R}$ aperto e chiuso e non vuoto

siccome A è chiuso e $\neq \emptyset$ $A \supseteq \mathbb{N}$

siccome A è aperto e $A \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$ $\Rightarrow A = \mathbb{R}$

Gli unici sottospazi aperti e chiusi di $(\mathbb{R}, \tau)$ sono $\emptyset$ ed $\mathbb{R}$

13) $(\mathbb{R}, \tau_+)$ $\qquad \tau_+ = \{(-\infty, a),\ a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}$

Quali di questi sottospazi sono compatti con la topologia ereditata da τ_+ ?

$A = (0,1)$, $B = [0,1)$, $C = (0,+\infty)$, $D = [0,+\infty)$, $E = (-\infty, 1)$, $F = (-\infty, 1]$

<u>OSS</u> $\tau_+ \subsetneq \tau_e$ quindi il fatto che non siano compatti con τ_e non implica non compattezza con τ_+

posso prendere $\mathcal{A} = \{(-\infty, 1 - 1/n),\ n \in \mathbb{N}^+\}$ è ricoprimento aperto di A che non ammette sottoric. finiti $\Rightarrow$ A non è compatto con τ_+

$\mathcal{A}$ va bene anche per non compattezza di B ed E!

$\mathcal{A}' = \{(-\infty, n),\ n \in \mathbb{N}\}$ è ricoprimento aperto di C e D che non ammette sottoricoprimenti finiti! C e D non sono compatti.

F è compatto in $(\mathbb{R}, \tau_+)$:

Prendo $\mathcal{A}$ ricoprimento aperto di F con τ_+

$1 \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ $\quad \exists A \in \mathcal{A}$ tale che $1 \in A \Rightarrow$ $A = \mathbb{R}$ ok $\{\mathbb{R}\}$ sottoric. finito

$A = (-\infty, a)$ $\quad a > 1$

allora $\{A\}$ è sotto ric. finito

$A \supseteq (-\infty, 1]$

Provate: 10, 15,