condizioni per cui un quoziente sia T2

23 novembre 2016

1

TEO $f: X \to Y$ mappa quoziente (identificazione)
X compatto e T2

Allora sono equivalenti

(1) Y è T2;
(2) f è chiusa;
(3) $K = \{(x, x') \in X \times X \mid f(x) = f(x')\} \subseteq X \times X$ ~~sia~~ è chiuso

OSS c'è (1)$\Leftarrow\Rightarrow$(2) sul Kosniowski - non c'è sul Manetti.

Lemma X compatto e T2 $\quad C, D \subseteq X$ chiusi disgiunti

$\exists\, A, B \subseteq X$ aperti tali che $C \subseteq A$, $D \subseteq B$ e $A \cap B = \emptyset$

dim
osserviamo che C e D sono compatti

fisso $x \in C$

$\forall y \in D \quad \exists\, \mathcal{U}_y, \mathcal{V}_y$ aperti in X tali che

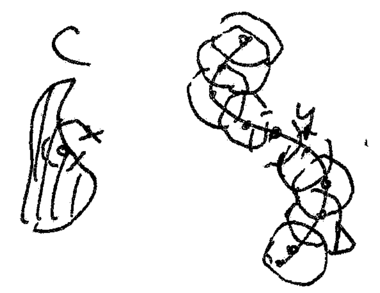
siccome X è T2 $\quad x \in \mathcal{U}_y \quad y \in \mathcal{V}_y$ e $\mathcal{U}_y \cap \mathcal{V}_y = \emptyset$

i V_y sono un ricoprimento aperto di D che è compatto

estraggo sottoricoprimento finito $V_{y_1}, \dots V_{y_k}$ per certi $y_1, \dots y_k \in D$

$V_x := \bigcup_{i=1}^{k} V_{y_i}$ è aperto che contiene D

$U_x := \bigcap_{i=1}^{k} U_{y_i}$ siccome sono finiti è aperto che contiene x



Ricordiamoci di x : V e U dipendono da x

$\{U_x\}$ al variare di $x \in C$ sono un ricoprimento aperto di C $\Rightarrow$ estraggo sottoric. finito

$U_{x_1} \dots U_{x_m}$

$A := \bigcup_{J=1}^{m} U_{x_i}$ è aperto che contiene C e

$B := \bigcap_{J=1}^{m} V_{x_i}$ aperto che contiene D

$A \cap B = \emptyset$

⊠

dimostrazione del teorema

(1) ⟹ (2) ce l'abbiamo: ogni appl. continua da un compatto a un $T2$ è chiusa

dimostriamo

$$\begin{tikzcd} & (1) \arrow[dl, Rightarrow] & \\ (3) \arrow[rr, Rightarrow] & & (2) \arrow[ul, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

(2) ⟹ (1) suppongo f chiusa voglio vedere che Y è $T2$

prendo $y, y' \in Y$ $y \neq y'$ cerco due intorni aperti disgiunti

X è $T2$ e f è chiusa e suriettiva ⟹ i punti sono chiusi in Y (Y è $T1$)

y e y' sono chiusi di Y

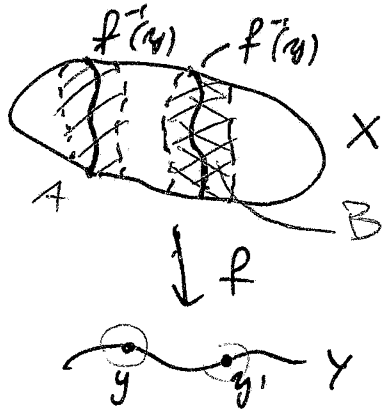
$f^{-1}(y)$, $f^{-1}(y')$ sono chiusi in X

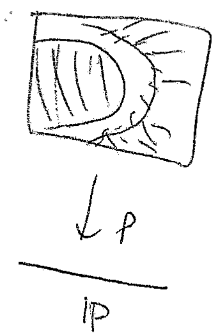
per il lemma $\exists$ A, B aperti in X tali che $A \supseteq f^{-1}(y)$ $B \supseteq f^{-1}(y')$

e $A \cap B = \emptyset$

$f(X \setminus A)$ è immagine di un chiuso dunque chiuso in Y

e $y \notin f(X \setminus A)$





$f(X \setminus B)$ è chiuso e non contiene y'

prendo allora $\mathcal{U} = Y \setminus f(X \setminus A)$ intorno aperto di y

$\mathcal{V} = Y \setminus f(X \setminus B)$ intorno aperto di y'

e $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$

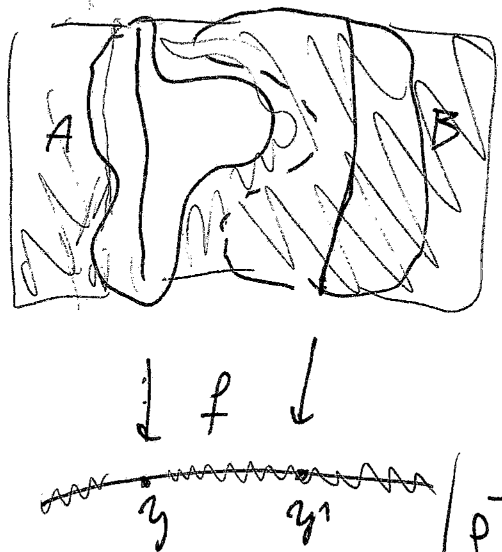
infatti

sia $z \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ $\quad z \in Y \setminus f(X \setminus A) \quad z \notin f(X \setminus A)$

$z \in f(X \setminus A)$ sse $f^{-1}(z) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$

$z \notin f(X \setminus A)$ sse $f^{-1}(z) \cap (X \setminus A) = \emptyset$

cioè $f^{-1}(z) \subseteq A$



$z \in Y \setminus f(X \setminus B) \iff f^{-1}(z) \subseteq B$

$\Rightarrow f^{-1}(z) \subseteq A \cap B = \emptyset$ quindi $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$

$$\boxed{f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus A)) \subseteq A}$$

ok abbiamo trovato intorni aperti disgiunti di y e y'

(1) $\Rightarrow$ (3) $\quad Y$ T2 $\leftrightarrow$ $\boxed{\Delta \subseteq Y \times Y \text{ è chiuso}}$

Suppongo $\quad$ voglio: $X \times X \setminus K$ è aperto

$(x, x') \notin K$ $\quad$ cioè $\quad f(x) \neq f(x') \in Y$

ma Y è T2 $\quad \exists\, \mathcal{U}, \mathcal{U}'$ aperti con $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}' = \emptyset$

$\underset{\large f(x)}{\in} \quad \underset{\large f(x')}{\in}$

cerco intorno aperto di (x, x') in $X \times X \setminus K$
della base canonica

cerco $\quad \mathcal{W}, \mathcal{W}'$ intorni aperti di x e x' tali che

$f(\mathcal{W}) \cap f(\mathcal{W}') = \emptyset$

f continua $\quad$ Dati $\mathcal{U}$ e $\mathcal{U}'$ come sopra $\exists\, \mathcal{W}, \mathcal{W}'$ intorni aperti di x e x' risp.

tali che $\quad f(\mathcal{W}) \subseteq \mathcal{U} \quad$ e $f(\mathcal{W}') \subseteq \mathcal{U}'$ $\quad \boxed{\text{OK}}$

(3) $\Rightarrow$ (2) $\quad K$ chiuso in $X \times X$ che è compatto perché prodotto di compatti.
Dunque K è compatto.

prendo $C \subseteq X$ chiuso

$$\underbrace{(C\times X)\cap K}_{\text{è compatto}} \subseteq X\times X$$

$$K=\{(x,x') \text{ con } f(x)=f(x')\}$$

$$P_2((C\times X)\cap K)=?$$

$$\| $$

$$\{x\in X \quad \exists c\in C \text{ tale che } f(c)=f(x)\} =$$

$$\{x\in X \text{ tc } \exists x'\in X \text{ tc } (x',x)\in (C\times X)\cap K\}$$

$$\{x\in X \text{ tc } \exists x'\in X \text{ tc } x'\in C \text{ e } f(x')=f(x)\}$$

$$=\{x\in X \text{ tc } f(x)\in f(C)\} = f^{-1}(f(C))$$

voglio: $f(C)$ chiuso in $Y \underset{\substack{\uparrow \\ Y \text{ è quoziente} \\ \text{di } X \text{ rispetto a } f}}{\Leftrightarrow} f^{-1}(f(C))$ chiuso in X e $\underbrace{f^{-1}(f(C)) = P_2(\underbrace{(C\times X)\cap K}_{\text{compatto}})}_{\text{compatto}}$

$P_2((C\times X)\cap K$ è compatto perchè immagine tramite continua di un compatto

$\cap|$

X che è T2 $\Rightarrow$ è chiuso in X

$\boxtimes$

Per <u>esercizio</u> pensate a quali ipotesi sono ~~necessarie~~ strettamente necessarie nelle varie implicazioni

$$\begin{tikzcd} & (1) \arrow[dl, Rightarrow] & \\ (3) \arrow[rr, Rightarrow] & & (2) \arrow[ul, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

<u>OSS</u>

ci si può chiedere se vale: $p: X \to Y$, $q: Z \to W$ mappe quozienti

$$p \times q : X \times Z \to Y \times W$$ è ancora mappa quoziente ?? NO!

fare controesempio a esercitazioni

Caso in cui funziona: se p, q sono anche <u>aperte</u>. Allora $p \times q$ è <u>aperta</u>

allora $p \times q$ è aperta continua e suriettiva $\Rightarrow$ è mappa quoziente!

nel caso chi<u>uso</u> NON vale più!

Azioni di gruppo

insiemisticamente G gruppo e X insieme una azione sinistra di G su X (speculare a azione destra vista con Monti)

è applicazione
$$G \times X \longrightarrow X$$
$$(g, x) \longmapsto g \cdot x$$

tale che se e è elemento neutro di G e $\circ$ ~~l'operazione~~ operazione di G

→ $e \cdot x = x \quad \forall x \in X$

e

→ $\forall g, g' \in G \qquad (g \circ g') \cdot x = g \cdot (g' \cdot x) \quad \forall x \in X$

per esercizio

$\forall g \in G \quad \vartheta_g : X \longrightarrow X$, $x \longmapsto g \cdot x$ vale che $\vartheta_{g^{-1}}$ è inversa di ϑ_g :

ϑ_g è applicazione biiettiva di $X \to X$

Dato $x \in X$ l'orbita di ~~x~~ x per l'azione di G è $G \cdot x = \{ g \cdot x \ , g \in G \}$ notate: $x \in G \cdot x$

le orbite formano una partizione di X

X/G insieme quoziente : $\{$orbite$\}$

Se X è uno spazio topologico e G un gruppo che agisce su X chiediamo che $\forall g \in G$ $\vartheta_g : X \to X$ sia un <u>omeomorfismo</u>

Allora
$$\begin{aligned} \vartheta : G &\longrightarrow \mathrm{Omeo}(X) \\ g &\longmapsto \vartheta_g \end{aligned}$$

$g, g' \in G$ $\quad \vartheta(g \circ g') = \vartheta_{g \circ g'}$ $\qquad$ $\vartheta_{g \circ g'} : X \to X$

$$x \longmapsto (g \circ g') \cdot x = g \cdot (g' \cdot x) = \vartheta_g \circ \vartheta_{g'}(x)$$

$$\underbrace{\vartheta(g \circ g')}_{\text{comp. in } G} = \vartheta_g \circ \vartheta_{g'} = \underbrace{\vartheta(g) \circ \vartheta(g')}_{\text{comp in Omeo}(X)}$$

ϑ è omomorfismo di gruppi $\quad \operatorname{im}\vartheta < \mathrm{Omeo}(X)$

ES) $\quad X/G = X/\operatorname{im}\vartheta$

Dato sp. top X con azione di un gruppo G su di esso

posso considerare $\operatorname{im}\vartheta \underset{\substack{\uparrow \\ \text{è un sottogruppo}}}{<} \mathrm{Omeo}(X) = \left\{ \begin{array}{c} \text{gruppo omeomorfismi da } X \text{ in sé} \\ \text{con la composizione} \end{array} \right\}$

Ma nel parlare direttamente di sottogruppi di $\mathrm{Omeo}(X)$

X/G ha topologia indotta da

$$\pi : X \longrightarrow X/G$$
$$x \longmapsto G.x$$

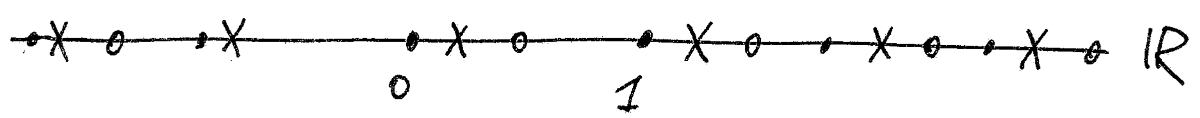
si chiama spazio quoziente rispetto alla azione di gruppo di G

<u>Esempio</u> 1) trasformazioni del piano euclideo sono azioni di gruppo su uno spazio topologico

2) $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R}$ "$\mathbb{Z}$ agisce a sinistra su $\mathbb{R}$"

azione per traslazione $z \in \mathbb{Z} \longmapsto (x \overset{\tau_z}{\longmapsto} x+z)$

com'è fatto lo spazio quoziente?



$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \sim S^1$ $\qquad \mathbb{R} \xrightarrow{e} S^1 \qquad e(t) := (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t)) \in \mathbb{R}^2$

<u>per esercizio</u> e è <u>aperta</u> ~~suge~~ e è suriettiva e aperta $\Rightarrow$ è mappa quoziente

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{e} & S^1 \\ & \pi \searrow \quad = \quad \nearrow h & \\ & \mathbb{R}/\mathbb{Z} & \end{array}$$

$e^{-1}(\underline{x}) \quad \underline{x} \in S^1$

$= \mathbb{Z} + a$ dove $a \in e^{-1}(\underline{x})$

le fibre di e e π sono le stesse

propr. universale top. quoziente.

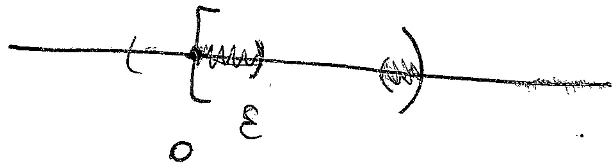
$\exists h: \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1$ continua e biiettiva tale che $h \circ \pi = e$ e e è aperta $\Rightarrow$ h aperta

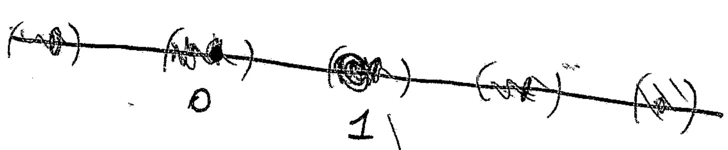
$\Rightarrow$ h è un omeomorfismo

OSSERVAZIONE

$[0,1) \subset \mathbb{R}$ ho uno e un solo elemento per ogni classe di equivalenza per l'azione di $\mathbb{Z}$

però $[0,1) \not\approx S^1$ quindi $[0,1) \not\approx \mathbb{R}/\mathbb{Z}$





aperto saturo ~~dato~~ che dà intorno

$$\left\{ (-\varepsilon+n, \varepsilon+n) \quad n \in \mathbb{Z} \right\}$$

$\varepsilon < 1/2$

$\pi((-\varepsilon+n, \varepsilon+n))$ è sistema fond. di intorni aperti in $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$

$[0,1) \xrightarrow{\pi} S^1$ π non è un omeomorfismo

$\boxed{\text{OSS}}$ se ho mappa quoziente $\pi : X \to Y$
e ho $Z \subseteq X$ tale che $Z \cap \pi^{-1}(y)$ è un punto $\forall y \in Y$

non è vero che in generale che $Z \simeq Y$

$f : Z \longrightarrow X$ è biiettiva e continua ma non è necessariamente un omeomorfismo

$Z = [0,1)$ $\quad Y = S^1$ $\quad$ con $\pi = e$ è controesempio
$X = \mathbb{R}$

<u>PROP</u> $G < \text{Omeo}(X)$

$\pi : X \longrightarrow X/G$ è sempre <u>aperta</u>
e se $|G| < +\infty$ allora π è <u>chiusa</u>