ESERCIZI

4 ottobre

Manetti 3.1

1) sullo singoletto esiste una sola struttura topologica? sì

$X = \{x\}$ unica poss. topologia è $\{\{x\}, \emptyset\} = \mathcal{T} = \mathcal{D} = \mathcal{K}$

2) X con $|X| = 2$ esistono 4 strutture topologiche

$X = \{a, b\}$ $\quad \{X, \emptyset\}$ $\quad \mathcal{D}$ $\quad \tau_a = \{\{a\}, X, \emptyset\}$ sì

$\mathcal{E}$ $\quad \tau_b = \{\{b\}, X, \emptyset\}$

3) su X finito ogni topologia ha numero pari di aperti?

NO controesempio τ_a o τ_b

4) su X con $|X| = +\infty$ con topologia cofinita $\mathcal{K}$ ogni coppia di aperti non vuoti ha $\cap$ non vuota? sì

$(X, \mathcal{K})$ siano $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{K}$, $\mathcal{U} \neq \emptyset$, $\mathcal{V} \neq \emptyset$

$\mathcal{U} = X \setminus F \quad \mathcal{V} = X \setminus E \quad |E| < +\infty \quad |F| < +\infty$

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \underbrace{X}_{\text{infinito}} \setminus \underbrace{F \cup E}_{\text{insieme finito}} \neq \emptyset$$

5) (X, τ) spazio topologico metrizzabile

Dati $x, y \in X$ $x \neq y$ $\exists\, \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \tau$

tali che $x \in \mathcal{U}$ $y \in \mathcal{V}$ e $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$

Sia d metrica che induce la topologia τ

$x \neq y$ $a = d(x, y) > 0$

prendo $\underset{\mathcal{U}}{\underset{\shortparallel}{B_{a/2}(x)}}$ e $B_{a/2}(y) = \mathcal{V}$

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$$

infatti se $z \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ $\underset{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a}{\underset{\wedge}{d(z, x) + d(z, y)}} \overset{\text{distanza}}{\geq} \underset{a}{\underset{\shortparallel}{d(x, y)}}$ assurdo

OSS. - es 6) La topologia cofinita su un insieme di cardinalità infinita non è metrizzabile!

(4) + (5) ok

7) X con $|X| < +\infty$ l'unica topologia metrizzabile è quella discreta.

la topologia discreta è metrizzabile ok

supponiamo che τ sia topologia metrizzabile

sia d metrica che induce τ

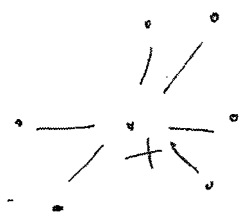
Voglio: ~~che~~ tutti i punti di X sono aperti

$x \in X$ $\quad d(x,y) > 0$ per ogni $y \neq x$

$$\min\{d(x,y),\ y \in X \setminus \{x\}\} = a > 0$$

allora $\quad B_a(x) = \{x\}$

dunque $\{x\}$ è aperto!



Alternativamente

fissato $x \in X$ $\quad \forall y \in X \setminus \{x\}$ $\quad \exists r_y > 0$ tc

$B_{r_y}(y) \not\ni x$ $\quad$ (forma più debole della ~~proprietà~~ di (6))

$$\bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} B_{r_y}(y)$$

$\forall x \in X \quad \forall y \in X \setminus \{x\} \ \exists\, r_y > 0$ tc

$$B_{r_y}(x) \not\ni y$$

(forma debole di (6))

$$\bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} B_{r_y}(x) = \{x\} \longrightarrow B_{\min_{y \in X \setminus \{x\}} \{r_y\}}(x)$$

$\uparrow$

intersezione finita

---

8) $\mathcal{F} = \{ (-\infty, a],\ a \in \mathbb{R} \} \cup \{ \emptyset, \mathbb{R} \}$

è una topologia su $\mathbb{R}$?

per essere una topologia dovrei avere che qualunque collezione di elementi di quella forma è ancora di quella forma?

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} \left(-\infty, -\tfrac{1}{n}\right] = (-\infty, 0) \notin \mathcal{F}$$

abbiamo trovato una collezione di elementi di $\mathcal{F}$ le cui unione non appartiene a $\mathcal{F}$!

NON è una topologia su $\mathbb{R}$

9) sia X insieme

siano d e d' due metriche su X.

supponiamo che $\exists\, \alpha, \beta > 0$ tali che $\forall x, y \in X$

vale che $$\alpha d(x,y) \geq d'(x,y) \geq \beta d(x,y)$$

allora d e d' sono topologicamente equivalenti

(cioè inducono la stessa topologia su X)

La prima disuguaglianza ci dice che $\forall x \in X\ \forall r > 0$

vale che $$B_r^{d}(x) \subseteq B_{\alpha r}^{d'}(x) \quad (\heartsuit)$$

bolla di centro x e raggio r rispetto a d

bolla di centro x e raggio αr rispetto a d'

infatti $y \in B_r^d(x) \iff d(x,y) < r$

$\Rightarrow d'(x,y) \leq \alpha d(x,y) < \alpha r$ (prima dis.)

dunque $y \in B_{\alpha r}^{d}(x)$

D'altra parte abbiamo che
$$B^{d'}_{\beta r}(x) \subseteq B^d_r(x) \quad (\bigstar)$$

infatti se $d'(x,y) < \beta r$ allora per la seconda disuguaglianza

$\beta d(x,y) \leq d'(x,y) < \beta r$

dunque $d(x,y) < r$

Queste inclusioni ci dicono che gli aperti indotti dalle due metriche sono gli stessi:

vediamo che da $(*)$

deriva che $\tau_d \subseteq \tau_{d'}$

sia $\mathcal{U}$ aperto per d:

$\forall x \in \mathcal{U} \quad \exists r>0$ tale che $B^d_r(x) \subseteq \mathcal{U}$

ma per $(*)$ ho che $\quad B^{d'}_{\beta r}(x) \subseteq B^d_r(x) \subseteq \mathcal{U}$

dunque posso scrivere $\mathcal{U}$ così:

$$\mathcal{U} = \bigcup_{x \in \mathcal{U}} B^{d'}_{\beta r}(x)$$

quindi $\mathcal{U}$ è aperto per d'.

L'altra inclusione si dimostra in modo analogo osservando che $(*)$ è equivalente a

$$B^d_{r/\alpha}(x) \subseteq B^{d'}_{r}(x) \quad \forall r>0 \quad \forall x \in X$$

Attenzione: posso avere metriche topologicamente equivalenti ma che non soddisfano la relazione dell'esercizio (9)

<u>esempio</u> $\quad d_e$ e $\overline{d_e} = \min\{1, d_e\}$ su $\mathbb{R}^n$

<u>lascio a voi</u>: d_e e $\overline{d_e}$ sono topologicamente equivalenti

ma $\overline{d_e}(\underline{x}, \underline{y}) \leq 1 \quad \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$

dunque $\quad \nexists \beta > 0$ tale che

$$\overline{d_e}(\underline{x}, \underline{y}) \geq \beta\, d_e(\underline{x}, \underline{y}) \quad \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$$

3) $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{R}^n$

$$d_1(\underline{x},\underline{y}) + d_1(\underline{y},\underline{z}) \overset{?}{\geq} d_1(\underline{x},\underline{z})$$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i| \qquad \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(|x_i - y_i| + |y_i - z_i| \right) \geq \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i|$$

/ ok per dis. triangolare su $\mathbb{R}$

$$d_\infty(\underline{x},\underline{y}) + d_\infty(\underline{y},\underline{z}) = \max_i \{|x_i - y_i|\} + \max_j \{|y_j - z_j|\}$$

$$\geq \max_i \{ \underbrace{|x_i - y_i| + |y_i - z_i|}_{\geq |x_i - z_i|} \} \geq d_\infty(\underline{x},\underline{z})$$

<u>osserviamo</u>

$$d_\infty(\underline{x},\underline{y}) \leq d_e(\underline{x},\underline{y}) \leq d_1(\underline{x},\underline{y}) \leq n\, d_\infty(\underline{x},\underline{y})$$

$$B^{d_\infty}_{r/n}(\underline{x}) \subseteq B^{d_1}_r(\underline{x}) \subseteq B^{d_e}_r(\underline{x}) \subseteq B^{d_\infty}_r(\underline{x})$$

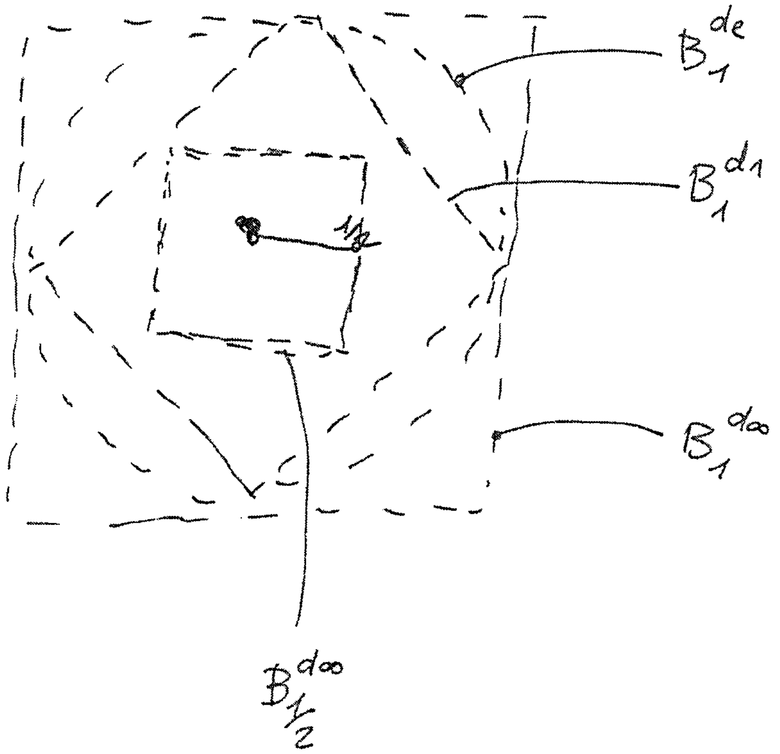
$$\sqrt{\sum (x_i - y_i)^2} \le \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

basta elevare al quadrato entrambi i membri

$$\sum (x_i - y_i)^2 \qquad \sum (x_i - y_i)^2 + \underbrace{\text{altri termini}}_{\geq 0}$$

Questa catena di disuguaglianze ci dice che la topologia indotta da queste tre metriche è sempre la topologia euclidea !

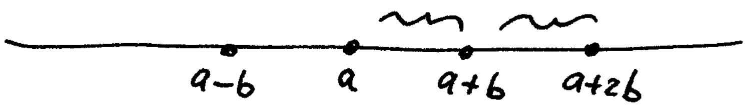
in $\mathbb{R}^2$ $r = 1$ $\underline{x} = 0$



Dimostrazione topologica che esistono infiniti numeri primi (Manetti esercizio 3.6) nuova edizione

$\forall a, b \in \mathbb{Z}$ con $b > 0$ sia $N_{a,b} = \{ a + kb \mid k \in \mathbb{Z} \}$

progressioni aritmetiche



1) la famiglia $\mathcal{B} = \{ N_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b > 0 \}$ è una base per una topologia τ su $\mathbb{Z}$

usiamo il lemma della base:

$N_{0,1} = \mathbb{Z}$ dunque vale la (i) $\left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = \mathbb{Z} \right)$

per la (ii): studiamo $N_{a,b} \cap N_{c,d}$

l'intersezione può essere vuota, ad esempio

$N_{1,2} = \{$ numeri dispari $\}$

$N_{0,2} = \{$ numeri pari $\}$

In generale se $e \in N_{a,b} \cap N_{c,d}$

osserviamo che $N_{e,bd} \subseteq N_{a,b} \cap N_{c,d}$

Infatti

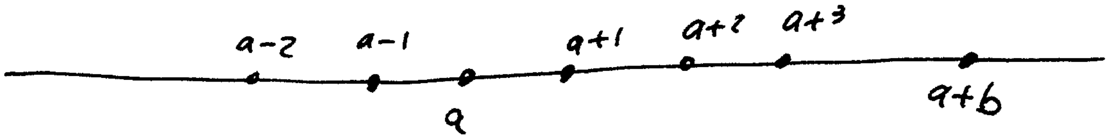
$$e + hbd \underset{\text{poiché } e \in N_{a,b}}{=} (a + kb) + hbd = a + (k + hd)b \in N_{a,b}$$

$$\underset{\text{poiché } e \in N_{c,d}}{=} (c + k'd) + hbd = c + (k' + hb)d \in N_{c,d}$$

Dunque $\boxed{\bigcup_{e \in N_{a,b} \cap N_{c,d}} N_{e,bd} = N_{a,b} \cap N_{c,d}}$ quindi vale il punto (ii) del lemma della base!

2) Vale che:

$$\mathbb{Z} \setminus N_{a,b} = N_{a+1,b} \cup N_{a+2,b} \cup \ldots \cup N_{a+b-1,b}$$



Dunque ogni $N_{a,b}$ è sia aperto (perché elemento della base) sia <u>chiuso</u>

3) Sia P l'insieme dei numeri primi

Vale che

$$\mathbb{Z} \setminus \{-1,1\} = \bigcup \{N_{0,p}, p \in P\}$$

per la fattorizzazione in primi di ogni numero intero!

Quindi, se $|P| < +\infty$ allora

$\{-1,1\}$ sarebbe un aperto in τ

ma ogni aperto in τ contiene un $N_{a,b}$ dunque è in particolare infinito, quindi abbiamo un assurdo!

... come ha fatto notare uno studente l'avevano fatta più semplice i greci! ...