Lidia Stoppino Geometria 1

www.stoppino.it ← pagina del corso
scansioni di queste note
esercizi pagine vecchi corsi : temi d'esame

esercitatore Andrea Cattaneo
prima lezione 20 ottobre (giovedì)

per adesso NO LEZIONE giovedì

lezioni 14 - 17 martedì
11 - 13 mercoledì | 5 minuti accademici!

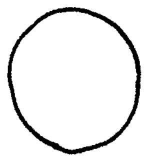
Testi (studiate sui libri!)
Manetti, topologia, Springer
Kosniowski, Introduzione alla topologia Algebrica, Zanichelli
Munkres, Topology. (in inglese)

Esame scritto e orale - scritto : esercizi anche abbastanza teorici
orale : dopo lo scritto o all' esame successivo
ammissione orale : 14/30

Ricevimento : su appuntamento

<u>introduzione del corso</u> topologia = topos + logos studio dei luoghi

"studio di proprietà di oggetti a meno di deformazioni continue"

 $\subseteq \mathbb{R}^2$  $\subseteq \mathbb{R}^2$

Dal punto di vista topologico sono lo stesso oggetto!

vedremo dal pdv. matematico cosa vuol dire che abbiamo "un buco"

1) topologia generale è anche un linguaggio che ci permetterà di definire rigorosamente – più astrattamente concetti come
   - continuità
   - compattezza
   - connessione

linguaggio che vi servirà per tutti i vostri studi

2) <u>topologia algebrica</u> ⟼ servirà per definire il concetto di "buchi di uno spazio"

Topologia generale

def: spazio topologico: X insieme $\neq \emptyset$

$+ \ \tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ collezione di sottoinsiemi di X

che chiameremo APERTI per la topologia

tali che

(I) $X, \emptyset \in \tau$ (X e $\emptyset$ sono aperti)

(II) $\forall \{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq \tau \qquad \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{U}_\alpha \in \tau$

(unioni arbitrarie di aperti sono aperte)

(III) $\forall \ \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \tau \qquad \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \in \tau$

(~~ogni~~ intersezione di due aperti è ancora un aperto)

(X, τ) si dice spazio topologico $\quad \tau$ si dice topologia su X

elementi di uno spazio topologico si chiamano <u>punti</u> di X

def dato uno spazio topologico (X, τ)
$C \subseteq X$ si dice chiuso se $X \setminus C$ è aperto
(complementare di C)

attenzione: ci possono essere in uno spazio topologico
sottoinsiemi sia aperti sia chiusi
aperti e non chiusi
chiusi non aperti
né aperti né chiusi

In ogni spazio topologico (X, τ) X e $\emptyset$ sono sia aperti sia chiusi!

per I $X \setminus \{\emptyset\} = X$ $\{\emptyset\} \setminus X = \{\emptyset\}$

Esempi

→ X insieme $\neq \emptyset$ se prendo $\mathcal{P}(X)$ definisco una topologia su X
$\mathcal{P}(X)$ si chiama topologia discreta e si indica con simbolo $\mathcal{D}$

osserviamo che con la topologia discreta tutti i sottoinsiemi sono <u>chiusi</u>!

→ X insieme $\mathcal{C} = \{X, \emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(X)$

è una topologia su X

$X \cup X = X$ $\quad \{\emptyset\} \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$ $\quad X \cup \{\emptyset\} = X$

$X \cap X = X$ $\quad \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$ $\quad X \cap \emptyset = \emptyset$

] <u>topologia concreta</u>

<u>oss</u>, purchè $|X| > 1$ $\mathcal{D}$ e $\mathcal{C}$ sono diverse:

$$|X| > 1 \qquad \exists_{\emptyset \neq} Y \subsetneq X \qquad Y \in \mathcal{D} \text{ ma } Y \notin \mathcal{C}$$

tuttavia vale sempre $\quad \mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$

anzi in generale qualunque topologia su X è contenuta in quella discreta: $\quad (X, \tau)$ spazio topologico $\quad \tau \subseteq \mathcal{D}$

confrontabilità tra topologie

(X, τ_1), (X, τ_2) spazi topologici

Dico che τ_1 e τ_2 sono confrontabili se

$$\tau_1 \subseteq \tau_2 \qquad \text{oppure} \qquad \tau_2 \subseteq \tau_1$$

τ_2 è più fine di τ_1

equivalentemente

τ_1 è meno fine di τ_2

Topologie su insiemi finiti $\quad X$ insieme

$|X| = 1 \qquad X = \{x\} \qquad$ L'unica topologia su X

è $\mathcal{P}(X) = \mathcal{D} = \mathcal{C} = \{X, \emptyset\}$

spazio topologico con un punto solo si chiama singoletto

$|X| = 2 \qquad X = \{x, y\}$

$X = \{x, y\}$ che topologie posso avere

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \mathcal{D} = \{\{x,y\}, \{x\}, \{y\}, \emptyset\} \arrow[dl, phantom, sloped, "\supseteq"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subseteq"] & \\
\tau_x = \{\{x,y\}, \{x\}, \emptyset\} \arrow[dr, phantom, sloped, "\supseteq"] & & \tau_y = \{\{x,y\}, \{y\}, \emptyset\} \arrow[dl, phantom, sloped, "\subseteq"] \\
 & \mathcal{C} = \{\{x,y\}, \emptyset\} &
\end{tikzcd}$$

ES: verificate che τ_x e τ_y sono topologie

4 topologie possibili

τ_x e τ_y non sono confrontabili

ES: provate a trovare tutte le possibili topologie su un insieme di tre elementi.

Esercizio $X=\{a,b,c\}$

$$\mathcal{T}=\{X,\{a,b\},\{b,c\},\emptyset\}$$ è una topologia su X?

No! non vale la proprietà (III) : $\{a,b\}\cap\{b,c\}=\{b\}\notin\mathcal{T}$

$\mathcal{T}\cup\{\{b\}\}$ invece è una topologia su X!

OSS. se τ_1 e τ_2 sono topologie su insieme X

$$\tau=\tau_1\cap\tau_2$$ è ancora una topologia su X

(I) $X,\emptyset\in\tau_1$ $X,\emptyset\in\tau_2$ $\Rightarrow$ $X,\emptyset\in\tau$

(II) si verificano allo stesso modo : $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}\subseteq\tau_1\cap\tau_2=\tau$

(III)

$\Downarrow$ (II) su τ_1 $\quad$ $\Downarrow$ (II) su τ_2

$$\bigcup_{\alpha\in A}U_\alpha\in\tau_1 \qquad \bigcup_{\alpha\in A}U_\alpha\in\tau_2$$

$$\bigcup_{\alpha\in A}U_\alpha\in\tau_1\cap\tau_2=\tau$$

III si verifica allo stesso modo

Ad esempio, $\tau_x = \{X, \{x\}, \emptyset\}$ $\tau_y = \{X, \{y\}, \emptyset\}$

$X = \{x, y\}$

$$\tau_x \cap \tau_y = \mathcal{C} \text{ topologia concreta}$$

oss l'intersezione arbitraria di topologie è una topologia:

$\{\tau_\alpha\}_{\alpha \in J}$ famiglia di topologie su X

$\bigcap_{\alpha \in J} \tau_\alpha$ è ancora una topologia su X

stesse verifiche di prima!

X insieme

<u>def</u> $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$

$$\tau_{\mathcal{F}} := \bigcap_{\substack{\tau \text{ topologia} \\ \text{su } X \text{ che} \\ \text{contiene } \mathcal{F}}} \tau$$

è una topologia su X

si chiama <u>topologia generata da $\mathcal{F}$</u>

<u>Esempio di prima</u> $\mathcal{F} = \{ X, \{a,b\}, \{b,c\}, \emptyset \}$

$X = \{a,b,c\}$

$\tau_{\mathcal{F}}$ è la topologia $\{ X, \{a,b\}, \{b,c\}, \emptyset, \{b\} \} = ⊛$

Infatti qualunque topologia che contenga $\mathcal{F}$ deve contenere $\{b\}$ come aperto

perchè deve valere la proprietà (III) $\longrightarrow$ $\tau_{\mathcal{F}} \supseteq ⊛$

D'altra parte ⊛ è una topologia quindi $⊛ \subseteq \tau_{\mathcal{F}}$

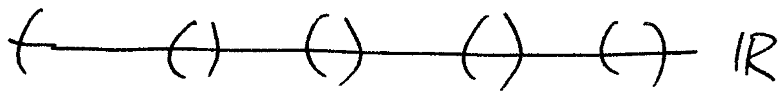
Esempio Su $\mathbb{R}$

Definisco $\tau_e = \{\text{unioni arbitrarie di intervalli } (a,b),\ a<b\} \cup \{\emptyset\}$

è una topologia su $\mathbb{R}$ e si chiama topologia euclidea

e la conosciamo già bene

(I) $\emptyset \in \tau_e$ $\quad \mathbb{R} = \bigcup_{a<b} (a,b)$



(II) sia

$\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ famiglia in τ_e

$$\forall \alpha \quad U_\alpha = \bigcup_{\beta \in J(\alpha)} (a_\beta, b_\beta) \implies \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} \bigcup_{\beta \in J(\alpha)} (a_\beta, b_\beta) \in \tau_e$$

$J(\alpha)$ insieme di indici

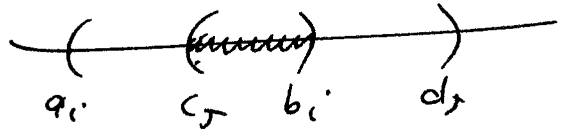
(III) $U, V \in \tau_e$ $\quad U = \bigcup_{i \in I} (a_i, b_i)$

$$V = \bigcup_{J \in \mathcal{J}} (c_J, d_J)$$

$$\mathcal{U}\cap\mathcal{V} = \Big(\bigcup_{i\in I}(a_i,b_i)\Big)\cap\Big(\bigcup_{j\in J}(c_j,d_j)\Big) = \bigcup_{i\in I,\, j\in J} \underbrace{(a_i,b_i)\cap(c_j,d_j)}$$

$$\emptyset \qquad \text{oppure} \qquad = (\max\{a_i,c_j\}, \min\{b_i,d_j\})$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{U}\cap\mathcal{V}\in\tau_e$$



le unioni di intervalli già le conoscete
di questa forma

come aperti euclidei!

Altri esempi - esercizi

su $\mathbb{R}$ definisco $\tau_- := \{(a,+\infty),\ a\in\mathbb{R}\}\cup\{\mathbb{R},\emptyset\}$

verifichiamo che è una topologia:

(I) OK

(II) prendo famiglia $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ di elementi di τ_-

non è limitativo supporre che $\forall\alpha$ $\mathcal{U}_\alpha = (a_\alpha,+\infty)$ per qualche $a_\alpha\in\mathbb{R}$

$$\bigcup_{\alpha\in A} (a_\alpha, +\infty) = (\inf_{\alpha\in A}\{a_\alpha\}, +\infty) \in \mathcal{T}_- .$$

III basta verificarla per $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ della forma $(a, +\infty)$, $(b, +\infty)$

$$\mathcal{U}\cap\mathcal{V} = (a, +\infty)\cap(b, +\infty) = (\max\{a, b\}, +\infty) \in \mathcal{T}_-$$

attenzione che l'analogo della proprietà III per $\cap$ infinite non vale!

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^+} (a - 1/n, +\infty) = [a, +\infty) \notin \mathcal{T}_-$$

questa topologia $\mathcal{T}_-$ si chiama topologia della semicontinuità inferiore

è confrontabile con la topologia euclidea:

$$\mathcal{T}_- \subsetneqq \mathcal{T}_e$$

$\mathcal{T}_e$ è strettamente più fine di $\mathcal{T}_-$

<u>Esercizio</u> X insieme $\neq \emptyset$ $\mathcal{K} = \{Y \subseteq X$ tc $X\setminus Y$ è un insieme finito$\} \cup \{\emptyset\}$ (insieme con $|X| < +\infty$ anche $\emptyset$!)

verificate che è una topologia su X.