4 ottobre Lezione 2

X insieme $\neq \emptyset$

τ topologia su X $\quad \tau \subseteq \mathcal{P}(X)$

(I) $\emptyset, X \in \tau$

(II) unione di aperti è aperta

(III) intersezione di due aperti è un aperto

---

oss. (III) $\Leftrightarrow$ intersezione finita di aperti sia un aperto

per induzione:

$\Rightarrow$ parte non banale

sia $P(k)$: intersezione di k aperti è aperta

proprietà

$P(2)$ è la (III) Base induttiva

supp. sia vera $P(k-1)$

prendiamo k aperti $U_1, \dots U_k \in \tau$

$$U_1 \cap U_2 \dots \cap U_k = \underbrace{(U_1 \cap \dots \cap U_{k-1})}_{\text{aperto per } P(k-1)} \cap U_k$$

aperto per $P(2)$

volta scorsa:

X insieme $\neq \emptyset$

$$K = \{ Y \subseteq X \text{ tali che } |X \setminus Y| < +\infty \} \cup \{\emptyset\}$$

topologia cofinita

verifichiamo che è una topologia:

(I) $X, \emptyset \in K$ ✓

(II) $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq K$ poniamo supporre che siano $U_\alpha = X \setminus F_\alpha$

dove $|F_\alpha| < +\infty$

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (X \setminus F_\alpha) = X \setminus \underbrace{\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha}_{\text{insieme finito!}} \in K$$

(III) $U, V \in K$

$U = X \setminus F \quad |F| < +\infty$

$V = X \setminus E \quad |E| < +\infty$

$$U \cap V = (X \setminus F) \cap (X \setminus E) =$$

$$= X \setminus \underbrace{(F \cup E)}_{\text{insieme finito!}} \longrightarrow \in K$$

Per esempio su $\mathbb{R}$

aperti per
top. cofinita
sono: $\mathbb{R}$ stesso

e i complementari di insiemi finiti di punti

osservazione - esercizio

sia $\{p_1, \dots, p_k\} \subseteq \mathbb{R}$ supp. $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_k$

$$\mathbb{R} \setminus \{p_1 \dots p_k\} = (-\infty, p_1) \cup (p_1, p_2) \cup \dots \cup (p_k, +\infty)$$

questo ci dice che la topologia cofinita su $\mathbb{R}$ è meno fine della topologia euclidea!

osservo che è strettamente meno fine

$$K \subsetneq \tau_e$$

Ad esempio se prendo $(0,1)$

$\mathbb{R} \setminus (0,1)$ è un insieme infinito

dunque $(0,1) \notin K$!

OSS è possibile definire una topologia su un insieme X definendo i CHIUSI

in questo caso def $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$

famiglia dei chiusi:

con proprietà:

prop. delle top

$X \in \mathcal{C}$	$\emptyset \in \mathcal{T}$
$\emptyset \in \mathcal{C}$	$X \in \mathcal{T}$

(I)' $X, \emptyset \in \mathcal{C}$

(II)' intersezioni arbitrarie di chiusi devono essere chiusi

(III)' unione di due chiusi deve essere chiusa

Richiami su spazi metrici

def $X \neq \emptyset$ una metrica o distanza su X è applicazione

$$d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

tale che: 1) $d(x,y) \geq 0$ e $d(x,y)=0$ sse $x=y$

2) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in X$

3) $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z) \quad \forall x,y,z \in X$ (dis. triangolare)

(X,d) si chiama spazio metrico

Esempi

→ su $\mathbb{R}^n$ abbiamo la metrica euclidea

$$d_e(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

→ $X \neq \emptyset$ insieme qualsiasi

d metrica discreta

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x=y \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

unica cosa da verificare: dis triangolare:

se $d(x,z) = 1 \iff x \neq z$ e dunque $\begin{cases} x \neq y \\ y \neq z \end{cases}$

quindi 3) vale

→ su $\mathcal{C}^0([0,1])$ = funzioni continue su $[0,1]$

$$d(f,g) := \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$$

$f, g \in \mathcal{C}^0([0,1])$

verificate che è metrica

→ data d metrica su X

$$\bar{d}(x,y) := \min\{1, d(x,y)\}$$

$$\tilde{d}(x,y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

] verificate che sono metriche

---

def (X,d) spazio metrico $x \in X$ $r > \mathbb{R}$

sulla palla di raggio r e centro x

$$B_r(x) := \{y \in X \text{ tc } d(x,y) < r\}$$

sia aperto per (X,d) è $\mathcal{U} \subseteq X$

tale che $\forall x \in \mathcal{U}$ $\exists r > 0$ tc. $B_r(x) \subseteq \mathcal{U}$

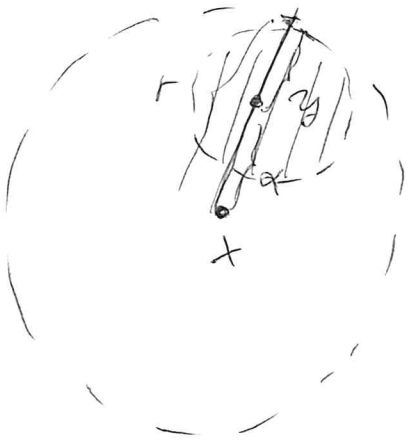
lemma 1 le bolle sono aperte:

$B_r(x) \ni y$: $d(y,x) < r$

$\| \alpha$

se $\alpha = 0$ $\quad y = x$ $\quad B_r(x) \subseteq B_r(x)$

se $\alpha > 0$



prendo

$B_{r-\alpha}(y) \subseteq B_r(x)$

verifichiamolo:

se $z \in B_{r-\alpha}(y)$

$d(y,z) < r-\alpha$

$d(z,x) \leq d(z,y) + d(y,x) < r$

disuguaglianza triangolare $\quad r-\alpha \quad \alpha$

---

lemma 2 gli aperti per le metriche sono unioni di bolle:

$\mathcal{U}$ aperto $\quad \forall x \in \mathcal{U} \quad \exists r_x > 0$ tc $B_{r_x}(x) \subseteq \mathcal{U}$

$$\mathcal{U} = \bigcup_{x \in \mathcal{U}} B_{r_x}(x)$$

prop (X, d) spazio metrico

$$\tau_d = \{ \text{aperti rispetto alla metrica } d \}$$

è una topologia su X

dim (I) $\emptyset \in \tau_d$ ok

$X \in \tau_d$ $x \in X$ $\forall r > 0$ $B_r(x) \subseteq X$

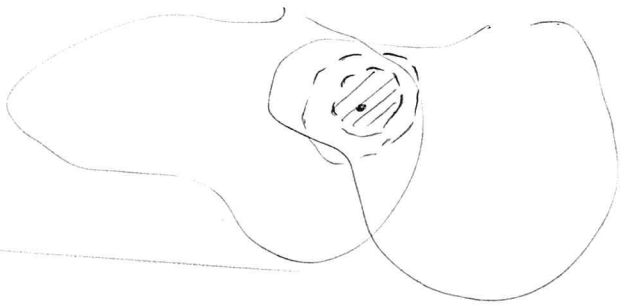
(II) ok per Lemma 2

(III) $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \tau_d$

$x \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ $\exists r > 0$ t.c. $B_r(x) \subseteq \mathcal{U}$

$\exists s > 0$ t.c. $B_s(x) \subseteq \mathcal{V}$

$B_{\min\{r,s\}}(x) \subseteq \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ (ok)



⊠

def
una topologia τ tale che
$\exists$ metrica d per le induce (t.c. $\tau = \tau_d$)

si chiama topologia metrizzabile

Esl su $\mathbb{R}^n$ la topologia indotta da metrica euclidea τ_e
→
si chiama topologia euclidea

→ (X, d) d metrica discreta $x \in X$

$$B_r(x) = \begin{cases} \text{se } r > 1 & X \\ \text{se } r \leq 1 & \{x\} \end{cases}$$

Aperti per metrica discreta: tutti i sottoinsiemi di X!

$\tau_d = \mathcal{D}$ topologia discreta:

la topologia discreta è dunque sempre metrizzabile!

Es| su un insieme finito l'unica topologia metrizzabile è quella discreta.

Dunque esistono topologie non metrizzabili!

---

def X d, d' metriche su X

d e d' sono topologicamente equivalenti se

$$\tau_d = \tau_{d'}$$

Es| Su $\mathbb{R}^n$

$$d_1(\underline{x}, \underline{y}) := \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

$$d_\infty(\underline{x}, \underline{y}) := \max\{|x_i - y_i|, i \in 1, \dots n\}$$

$$d(\underline{x}, \underline{y}) := \min\{|x_i - y_i|, i = 1, \dots n\}$$

vale che d_1 e d_∞ sono metriche ($\bar{d}$ non è metrica)
e sono topologicamente equivalenti

Es: Dato (X, d) sp. metrico metriche $\bar{d}$ e $\bar{\bar{d}}$
sono metriche topologicamente equivalenti a d

BASE per una topologia

def (X, τ) spazio topologico
una base per τ è $\mathcal{B} \subseteq \tau$
collezione di aperti

tali che ogni $U \in \tau$ è unione di
elementi di $\mathcal{B}$

es: (X, d) spazio metrico
→ le bolle sono una base per τ_d

→ $(X, \mathcal{D})$ $\mathcal{D}$ topologia discreta
Dato $x \in X$ $\{x\} \in \mathcal{D} \Rightarrow \{x\} \in \mathcal{B}$

ogni base per $\mathcal{D}$ deve contenere i singoletti
(tutti i punti di X)

→ (X, τ) sp. topologico
τ stesso è base per τ