Geometria I

CdL in Matematica, Università dell'Insubria

Prova scritta del 12 luglio 2018

Giustificare sempre le risposte.

1. Vero o falso? [se vero dimostratelo o spiegate perché, se falso esibite un controesempio]
   (a) Un'applicazione biiettiva tra spazi topologici è sempre un omeomorfismo.
   (b) Un'applicazione biiettiva e aperta tra spazi topologici è sempre un omeomorfismo.
   (c) Un'applicazione biiettiva tra spazi topologici è aperta se e solo se è chiusa.
   (d) Un'applicazione continua da un compatto ad uno spazio T2 è sempre chiusa.
   (e) Un'applicazione continua da un compatto ad uno spazio T2 è sempre aperta.

2. Si consideri la seguente famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:
$$\mathcal{T} := \{Y \subseteq \mathbb{R} \mid Y \cap \mathbb{Z} = \emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\}.$$
   (a) Si dimostri che $\mathcal{T}$ è una topologia su $\mathbb{R}$;
   (b) stabilire se $\mathcal{T}$ è confrontablile con la topologia euclidea $\mathcal{T}_e$, e/o con la topologia cofinita $\mathcal{K}$ su $\mathbb{R}$;
   (c) È una topologia T2? È T1?
   (d) Qual'è la chiusura dell'insieme $(0, 2)$ in $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$? Qual'è la sua parte interna?

3. Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$ (con la topologia euclidea):
   - $X := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$;
   - $Y := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, z \in [-1, 1]\}$;
   - $Z := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$;
   - $V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$;
   - $W : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

   (a) Si stabilisca per ciascuno se è compatto.
   (b) Si stabilisca per ciascuno se è connesso.
   (c) Si suddividano in classi di omeomorfismo.
   (d) Si suddividano in classi di equivalenza omotopica.